

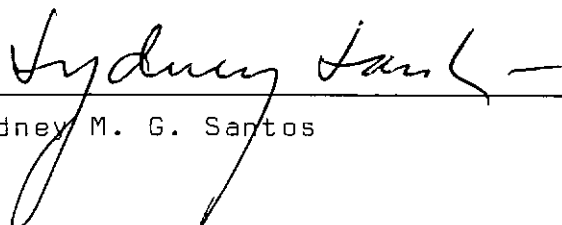
ESTUDO ENERGÉTICO DA FLAMBAGEM DE HASTES

ASSOCIADAS LONGITUDINALMENTE

Vera Lúcia Sinjeb da Silva Machado

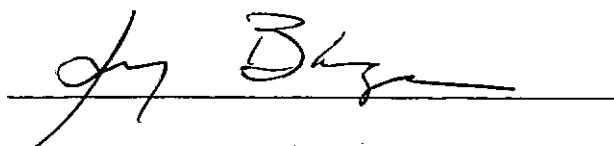
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.).

Aprovada por:



Sidney M. G. Santos





RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Novembro de 1980

Machado, Vera Lúcia Sinjeb da

Estudo Energético da Flambagem de Hastes Associadas Longitudinalmente | Rio de Janeiro | 1980.

xiv, 129 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ), M.Sc. Engenharia Civil, 1980.

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia.

1. Estudo de Hastes de Seção Espessas e Delgada.

I. COPPE-UFRJ

II. Título (Série)

Ao meu esposo e a meus pais,
pois sem a colaboração, estímulo
e abnegação, esse trabalho
não seria possível.

AGRADECIMENTOS

. Ao Prof. Sidney M. G. dos Santos, Professor Catedrático da UFRJ, pela orientação, dedicação e incentivo.

. Ao Departamento de ESTRUTURAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, pela oportunidade.

. Ao Prof. HILDEGARDO BENTES FORTUNATO, Prof. TITULAR DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, pela minha indicação.

. À todos os amigos da COPPE/UFRJ, pelo convívio e amizade.

RESUMO

O estudo da flambagem de hastes associadas longitudinalmente é abordado em duas partes distintas, correspondendo à geometria da seção transversal. Na parte I, em que abordam as peças maciças, instituem-se as equações de flambagem, sem maiores requisitos concernentes às constantes de massa, (com exclusão dos bi-momentos). Na parte II, faz-se pequena apresentação da geometria das massas, que tem no caso peculiaridades novas. Após esse estudo, abordam-se as associações que constituem o objetivo específico do trabalho. Condições de extremidades distintas são examinadas e considerações de ordem prática colocadas no final comentam os resultados apresentados.

ABSTRACT

The study of buckling of longitudinally associiated bars is developed in two different parts, according to the cross section geometry. In part I, where compact pieces were studied, buckling equations have been derived, without further mass constants considerations (no bi-moment actuations). In part II, a necessaire mass geometry presentation has been made, which in the case, has new peculiarities. After this study, associiations have been analysed which constitute the specific target of this work.

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Considerações Gerais	1
1.2 - Objetivo do Trabalho	1
CAPÍTULO 2 - HASTES MACIÇAS OU DE PAREDES ESPESSAS . .	3
2.1 - Formulação das Equações de Energia	3
2.1.1 - Peças com Eixos Principais da Seção Transversal em Planos Distintos	4
2.1.2 - Expressão do Potencial para a Prancha não Carregada	5
2.1.3 - Obtenção das Equações de Euler-Lagrange e Condições de Contorno para a peça não Carregada	9
2.1.4 - Expressão do Potencial para a Prancha Carregada	11
2.1.5 - Obtenção das Equações de Euler-Lagrange para a peça Carregada	13
2.1.6 - Sistemas para Obtenção da Carga Crítica . .	16
2.1.7 - Casos Particulares	17

2.1-7.1	- Peças num mesmo Plano	17
2.1-7.2	- Peças em Planos Perpendiculares	18
2.2	- Associação Longitudinal com 3 Pranchas, num mesmo Plano, sendo a Extrema Carregada . .	19
2.2-1	- Expressão do Potencial para a Prancha Carregada	19
2.2-2	- Expressão do Potencial para a Prancha Intermediária	20
2.2-3	- Expressão do Potencial para a Prancha Extrema Não Carregada	20
2.2-4	- Sistemas para Obtenção da Carga Crítica . .	23
2.3	- Associação Longitudinal de 3 Pranchas, num mesmo Plano sendo a Central Carregada .	23
2.3-1	- Expressão do Potencial para a Prancha Extrema (1)	23
2.3-2	- Expressão do Potencial para a Prancha Central	25
2.3-3	- Expressão do Potencial para a Prancha Extrema (3)	25

2.3-4 -	Sistemas que Levarão à Carga Crítica	27
2.4 -	Generalização do Problema: Caso de "n" Hastes Associadas num mesmo Plano e uma Única Peça Carregada	29
2.4-1 -	Sistemas que Levarão à Carga Crítica . . .	30
2.5 -	Outros Casos de Associações em Planos Distintos	31
2.6 -	Casos Particulares Analizadas quanto às Condições de Extremidades	37
CAPÍTULO 3 -	HASTES DE PAREDES DELGADAS	40
3.1 -	Considerações e Hipóteses Simplificadoras .	41
3.2 -	Determinação das Grandezas de Geometria das Massas	42
3.3 -	Estudo da Flambagem para Peça Isolada . . .	47
3.3-1 -	Determinação da Energia Interna de Deformação devido ao Bimomento	56
3.3-2 -	Expressão do Potencial	57
3.3-3 -	Obtenção das Equações de Euler-Lagrange . .	59
3.3-4 -	Sistema que levará à Carga Crítica	60

3.4 -	Flambagem das Peças de Seção Retangular . .	61
3.5 -	Associação Longitudinal de Duas Peças de Seção Aberta	65
3.5-1 -	Expressão da Energia Potencial para a Peça Não Carregada	67
3.5-2 -	Expressão do Potencial para a Prancha Carregada	70
3.5-3 -	Sistema que Levará à Carga Crítica	74
3.5-4 -	Caso Particular	75
3.6 -	Associações de Peças Retangulares de Paredes Delgadas	76
CAPÍTULO 4 -	PARTE APLICADA DO CAPÍTULO 2	80
CAPÍTULO 5 -	PARTE APLICADA DO CAPÍTULO 3	91
CAPÍTULO 6 -	Conclusões	124
6.1 -	Conclusões para Hastes Espessas	124
6.2 -	Conclusões para Hastes de Paredes Delgadas	125
BIBLIOGRAFIA	128

LISTA DE SÍMBOLOS

a) HASTES MACIÇAS

- b = Distância de eixo a eixo das articulações de uma peça
- l = Comprimento total da haste
- y = Eixo principal da seção transversal na direção da menor inércia
- z = Eixo principal da seção transversal na direção da maior inércia
- x = Eixo longitudinal da haste
- ϕ = Ângulo de torção
- α = Ângulo caracterizante das associações em planos distintos
- ξ = Eixo principal da seção transversal da peça inclinada na direção da menor inércia
- η = Eixo principal da seção transversal da peça inclinada na direção da maior inércia
- G = Módulo de Elasticidade Transversal
- E = Módulo de Elasticidade Longitudinal
- J_t = Momento de inércia de Torção
- I = Momento de inércia
- V = Forças de ligação que surgem com as associações longitudinais

π_p = Energia potencial

Ω = Trabalho das forças externas

N = Carga crítica considerando-se a associação

N_1 = Carga crítica da peça isolada

b) HASTES DE PAREDES DELGADAS

b = Distância de eixo a eixo das articulações de uma peça

l = Comprimento total da haste

y = Eixo principal da seção transversal na direção de maior inércia

x = Eixo principal da seção transversal na direção de menor inércia

z = Eixo longitudinal da haste

x^* = Eixo paralelo a x passando pelo centro de cisalhamento

y^* = Eixo paralelo a y passando pelo centro de cisalhamento

x_A = Coordenada do baricentro na direção de x em relação a x^*

y_A = Coordenada do baricentro na direção de y em relação a y^*

I_{x^*} = Momento de inércia em relação a x^*

I_x = Momento de inércia em relação a x

I_{y^*} = Momento de inércia em relação a y^*

I_y = Momento de inércia em relação a y

J_t = Momento de inércia de torção

u = empenamento

- s_o = Comprimento da linha média da seção transversal
 S = Área da Seção Transversal
 t = Espessura da haste
 A = Distância do baricentro ao centro de cisalhamento
 ω = Coeficiente de empenamento
 E_ω = Momento setorial estático
 ξ = Deslocamento do baricentro na direção de x
 η = Deslocamento do baricentro na direção de y
 ϕ = Ângulo de torção
 m_t = Momento de torção
 J_ω = Momento setorial de inércia
 B = Bimomento
 V_B = Energia interna de deformação devido ao bimomento
 σ_B = Tensão normal devido ao bimomento
 π_ρ = Energia potencial
 Ω = Energia potencial das cargas externas
 CA = Centro de Cisalhamento
 N = Carga crítica considerando-se a associação
 ξ_m = Deslocamento do ponto m na direção de x
 η_m = Deslocamento do ponto m na direção de y

ESTUDO ENERGÉTICO DA FLAMBAGEM DE HASTES
ASSOCIADAS LONGITUDINALMENTE

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

1.1 - Considerações Gerais

Ao se executarem cortinas de estacas - pranchas, sempre se adotam no projeto charneiras longitudinais que articulam as peças entre si. Nessas condições, se uma delas, ou várias, é solicitada longitudinalmente, teremos de considerar essa vinculação.

No presente trabalho, em que diversas associações serão analisadas, o método energético foi escolhido, pois possibilita uma formulação única para a totalidade dos casos em estudo..

Quanto à disposição ver-se-á que as peças são dispostas formando entre si ângulos arbitrários, de tal sorte que o tratamento adotado tornou-se assim bastante abrangente.

1.2 - Objetivo do Trabalho

Inicialmente trataremos das hastes maciças de paredes espessas e posteriormente das hastes de paredes delgadas. Apresentaremos dois quadros comparativos dos resultados. No primeiro, para as hastes maciças ou de paredes espessas, vá

rias associações longitudinais foram analisadas; no segundo com
param-se os resultados obtidos considerando-se a peça singela
ora como espessa, ora como de paredes delgadas, a fim de anali
sarmos a influência do empenamento.

São inúmeras as aplicações práticas de hastes
com associações longitudinais; podemos citar como exemplo as
cortinas metálicas, em que a flambagem pode ocorrer durante e
depois a cravação; outro exemplo; o caso de cortinas localiza
das nas divisas das construções, em que sobre elas correm-se vi
gas de amarração, de onde nascem os pilares da estrutura.

Nas instalações portuárias, e em solos fracamen
te resistentes, a cortina permanece como peça frequentemente li
vre de contenção, recebendo cargas que a plataforma lhes trans
mite, de grandeza sempre elevada.

Nessas condições há todo interesse em se deter
minar as cargas críticas, objetivando economia, o que se conse-
guirá com a orientação que a seguir se apresenta.

CAPÍTULO 2

2. HASTES MACIÇAS OU DE PAREDES ESPESSAS

2.1- Formulação das Equações de Energia

Consideremos inicialmente o caso da Figura 1.

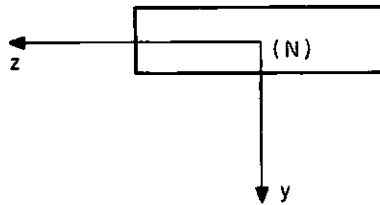


FIGURA 1

Designamos:

V_n Energia interna de deformação a compressão

V_y Energia interna de deformação a flexão na direção do eixo y

V_z Energia interna de deformação a flexão na direção do eixo z

V_T Energia interna de deformação a torção

Ω_y Energia potencial das cargas externas na direção de y

Ω_z Energia potencial das cargas externas na direção de z

Ω_T Energia potencial das cargas externas a torção

Sabemos que:

$$V_y = \int_0^l \frac{EI_z}{2} y''^2 dx$$

$$V_z = \int_0^l \frac{EI_y}{2} z''^2 dx$$

$$V_n = \int_0^l \frac{N}{2 ES} dx$$

$$V_T = \int_0^l \frac{GJ_t}{2} \phi'^2 dx$$

2.1.1 - Peças com Eixos Principais da Seção Transversal em Planos Distintos

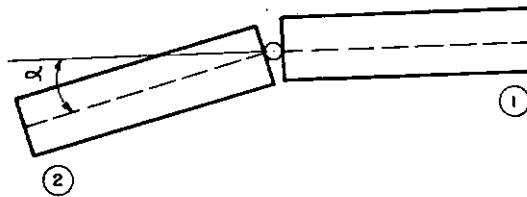


FIGURA 2

Representando apenas os eixos transversais e supondo a peça (1) carregada axialmente de N , no instante da flambagem podemos ter a configuração da Figura 2.b.

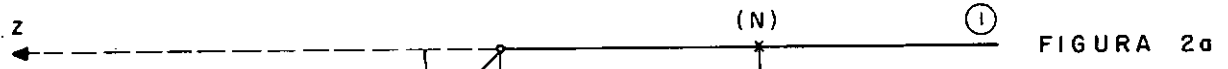


FIGURA 2a

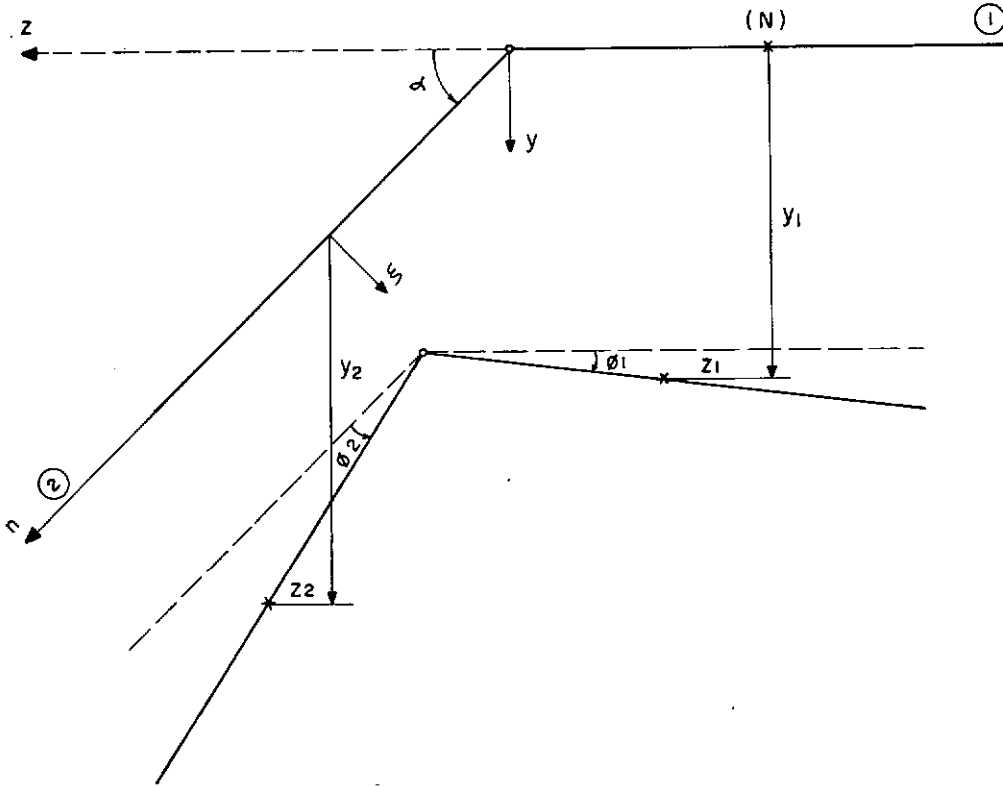


FIGURA 2b

2.1.2- Expressão do Potencial para a Prancha Não Carregada

Sabemos que a energia potencial de um sólido, que designamos π_p , é a soma da sua energia interna de deformação com a energia potencial das cargas externas, podemos então escrever para a prancha (2).

$$\pi_{p_2} = V_{y_2} + V_{z_2} + V_{T_2} + \Omega_{Y_2} + \Omega_{Z_2} + \Omega_{T_2}$$

Ao ser carregada a peça (1) de N , surgirá no con

tacto da prancha (1) com a (2), uma reação "v" que na prancha (2) terá componentes v_ξ e v_η , segundo os eixos ξ e η .

Admitindo-se pequenos deslocamentos faremos:

$$\text{sen } \phi \cong \phi \quad \text{e} \quad \cos \phi \cong 1;$$

teremos então a disposição da Figura 3.

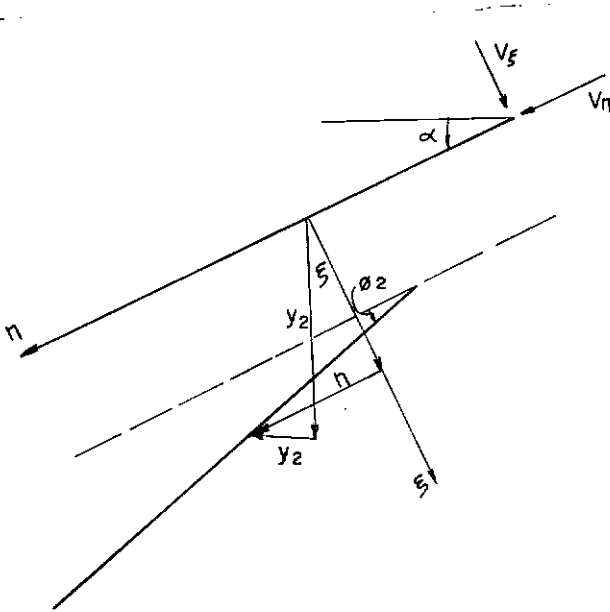


FIGURA 3

logo:

$$\pi_p = \int_0^l \left[\frac{EI_\eta}{2} \xi_2''^2 + \frac{EI_\xi}{2} \eta_2''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_2'^2 - v_\xi \cdot \xi - v_\eta \cdot \eta + \right. \\ \left. + \frac{b}{2} v_\xi \phi_2 \right] dx \quad (1)$$

As coordenadas ξ e η em função de y e z , es

crevem-se:

$$\xi = y_2 \cos \alpha - z_2 \sin \alpha$$

$$\eta = y_2 \sin \alpha + z_2 \cos \alpha$$

$$v_{\xi} = v_y \cos \alpha - v_z \sin \alpha$$

$$v_{\eta} = v_y \sin \alpha + v_z \cos \alpha$$

Derivando ξ e η duas vezes:

$$\xi'' = \frac{y''}{2} \cos \alpha - \frac{z''}{2} \sin \alpha$$

$$\eta'' = \frac{y''}{2} \sin \alpha + \frac{z''}{2} \cos \alpha$$

Levando ao funcional teremos:

$$\begin{aligned} \pi_{p2} = & \int_0^l \left[\frac{EI_{\eta}}{2} \left(\frac{y''}{2} \cos \alpha - \frac{z''}{2} \sin \alpha \right)^2 + \frac{EI_{\xi}}{2} \left(\frac{y''}{2} \sin \alpha + \frac{z''}{2} \cos \alpha \right)^2 \right. \\ & + \frac{GJ_t}{2} \phi'^2 + \frac{b}{2} (v_y \cos \alpha - v_z \sin \alpha) \phi_2 - \left. \left(\frac{y}{2} \cos \alpha - \frac{z}{2} \sin \alpha \right) \right. \\ & \left. (v_y \cos \alpha - v_z \sin \alpha) - (v_y \sin \alpha + v_z \cos \alpha) \left(\frac{y_2}{2} \sin \alpha + \frac{z_2}{2} \cos \alpha \right) \right] dx \\ & (2) \end{aligned}$$

É um funcional do tipo:

$$\pi_{p_2} = \int_0^{\ell} I(y_2, z_2, y_2'', z_2'', \phi_2, \phi_2') dx$$

Na configuração de flambagem, teremos para o conjunto: $\delta\pi_{p_2} = 0$

Minimização do funcional:

$$\begin{aligned} \delta\pi_{p_2} = \int_0^{\ell} & \left[\frac{\partial I}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial I}{\partial z_2} \delta z_2 + \frac{\partial I}{\partial y_2''} \delta y_2'' + \frac{\partial I}{\partial z_2''} \delta z_2'' + \right. \\ & \left. + \frac{\partial I}{\partial \phi_2} \delta \phi_2 + \frac{\partial I}{\partial \phi_2'} \delta \phi_2' \right] dx \end{aligned} \quad (3)$$

Sabemos que, mediante integração por partes:

$$\int_0^{\ell} \frac{\partial I}{\partial y''} \delta y'' dx = \frac{\partial I}{\partial y''} \delta y' \Big|_0^{\ell} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial y''} \right) \delta y \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial y''} \right) \delta y dx$$

$$\int_0^{\ell} \frac{\partial I}{\partial z''} \delta z'' dx = \frac{\partial I}{\partial z''} \delta z' \Big|_0^{\ell} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial z''} \right) \delta z \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial z''} \right) \delta z dx$$

$$\int_0^{\ell} \frac{\partial I}{\partial \phi'} \delta \phi' dx = \frac{\partial I}{\partial \phi'} \delta \phi \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi'} \right) \delta \phi dx$$

O desenvolvimento completo conduz pois a:

$$\begin{aligned}
 \partial \pi_{p_2} = & \int_0^{\ell} \left[\frac{\partial I}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial I}{\partial \phi_2} \delta \phi_2 + \frac{\partial I}{\partial z_2} \delta z_2 + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial y_2''} \right) \delta y_2 + \right. \\
 & + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial z_2''} \right) \delta z_2 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi_2'} \right) \delta \phi_2 \left. \right] dx + \frac{\partial I}{\partial y_2''} \delta y_2' \bigg|_0^{\ell} - \\
 & - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial y_2''} \right) \delta y_2 \bigg|_0^{\ell} + \frac{\partial I}{\partial z_2''} \delta z_2' \bigg|_0^{\ell} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial z_2''} \right) \delta z_2 \bigg|_0^{\ell} + \\
 & + \frac{\partial I}{\partial \phi_2'} \delta \phi_2 \bigg|_0^{\ell} = 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

Resultam para o problema proposto:

2.1.3- Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial I}{\partial y_2} + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial y_2''} \right) = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial z_2} + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial z_2''} \right) = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi_2'} \right) = 0 \quad (5)$$

Condições de Contorno:

$$\frac{\partial I}{\partial y_2''} \delta y_2' \bigg|_0^l = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial z_2''} \delta z_2' \bigg|_0^l = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_2'} \delta \phi_2 \bigg|_0^l = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial y_2''} \right) \delta y_2 \bigg|_0^l = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial z_2''} \right) \delta z_2 \bigg|_0^l = 0$$

Desenvolvendo o funcional e aplicando as equações acima vem:

$$\frac{EI}{2} \eta \left(2 y_2^{IV} \cos^2 \alpha - z_2^{IV} \sin 2\alpha \right) + \frac{EI}{2} \xi \left(2 y_2^{IV} \sin^2 \alpha + z_2^{IV} \sin 2\alpha \right) - v_y = 0$$

(7)

$$\frac{EI}{2} \eta \left(2 z_2^{IV} \sin^2 \alpha - y_2^{IV} \sin 2\alpha \right) + \frac{EI}{2} \xi \left(2 z_2^{IV} \cos^2 \alpha + y_2^{IV} \sin 2\alpha \right) - v_z = 0$$

$$\phi_2'' = \frac{b}{2GJ_t} (v_y \cos \alpha - v_z \sin \alpha)$$

Analisemos isoladamente a prancha (1), carregada.

A reação "v" provocada pela prancha (2), tentando impedir o deslocamento da prancha (1), terá componentes v_y e v_z , segundo os eixos y e z.

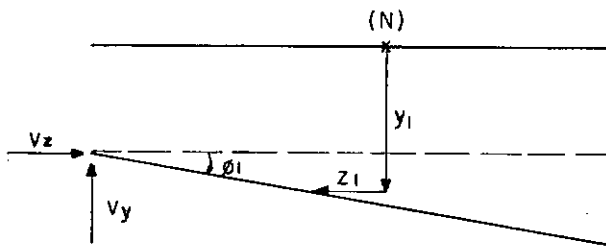


FIGURA 4

2.1.4- Expressão do potencial para a prancha (1):

$$\pi p_1 = V_{y_1} + V_{z_1} + V_{T_1} + V_N + \Omega_{y_1} + \Omega_{z_1} + \Omega_{T_1} + \Omega_N$$

, onde Ω_N é o potencial externo devido à carga axial N.

O abaixamento sofrido na direção de N durante a flexão é dado por:

$\Delta = \Delta y + \Delta z$, e analisando a flexão segundo os eixos y e z, podemos escrever:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad \text{e} \quad \Delta z = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx$$

A expressão da energia potencial, será pois:

$$\pi p_1 = \int_0^{\ell} \left[\frac{EI_z}{2} y_1''^2 + \frac{EI_y}{2} z_1''^2 + \frac{N^2}{2ES} + \frac{GJ_t}{2} \phi_1'^2 + v_y \cdot y_1 + v_z \cdot z_1 - \right. \\ \left. v_y \frac{b}{2} \phi_1 - \frac{N}{2} y_1'^2 - \frac{N}{2} z_1'^2 \right] dx \quad (8)$$

É um funcional do tipo:

$$\pi p_1 = \int_0^{\ell} I(y_1, z_1, \phi_1, y_1', z_1', \phi_1', y_1'', z_1'') dx$$

Portanto:

$$\delta \pi p_1 = \int_0^{\ell} \left[\frac{\partial I}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial I}{\partial y_1'} \delta y_1' + \frac{\partial I}{\partial y_1''} \delta y_1'' + \frac{\partial I}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial I}{\partial z_1'} \delta z_1' + \frac{\partial I}{\partial z_1''} \delta z_1'' + \frac{\partial I}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 + \frac{\partial I}{\partial \phi_1'} \delta \phi_1' \right] dx = 0 \quad (9)$$

Com marcha análoga teremos:

$$\begin{aligned}
\delta \pi_{p_1} = & \int_0^{\ell} \left[\frac{\partial I}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial I}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial I}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial y_1'} \right) \delta y_1 - \right. \\
& - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial z_1'} \right) \delta z_1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi_1'} \right) \delta \phi_1 + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial y_1''} \right) \delta y_1 + \\
& + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial z_1''} \right) \delta z_1 \Bigg] dx + \frac{\partial I}{\partial y_1'} \delta y_1 \Bigg|_0^{\ell} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial y_1''} \right) \delta y_1 \Bigg|_0^{\ell} + \\
& + \frac{\partial I}{\partial z_1''} \delta z_1 \Bigg|_0^{\ell} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial z_1''} \right) \delta z_1 \Bigg|_0^{\ell} + \frac{\partial I}{\partial y_1'} \delta y_1 \Bigg|_0^{\ell} + \frac{\partial I}{\partial z_1'} \delta z_1 \Bigg|_0^{\ell} + \\
& \frac{\partial I}{\partial \phi_1'} \delta \phi_1 \Bigg|_0^{\ell} = 0 \quad (9.a)
\end{aligned}$$

Donde:

2.1.5- Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial I}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial y_1'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial y_1''} \right) = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial z_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial z_1'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial I}{\partial z_1''} \right) = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi_1'} \right) = 0$$

Condições de contorno

$$\left| \frac{\partial I}{\partial y_1'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial y_1''} \right) \right| \delta y_1 \Big|_0^l = 0$$

$$\left| \frac{\partial I}{\partial z_1'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial z_1''} \right) \right| \delta z_1 \Big|_0^l = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial I}{\partial y_1''} \delta y_1' \Big|_0^l = 0 \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial z_1''} \delta z_1' \Big|_0^l = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_1'} \delta \phi_1 \Big|_0^l = 0$$

Aplicando as equações acima:

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + v_y = 0$$

$$EI_y z_1^{IV} + N z_1'' + v_z = 0 \quad (12)$$

$$\phi_1'' = - \frac{v_y b}{2GJ_t}$$

Das elásticas podemos tirar:

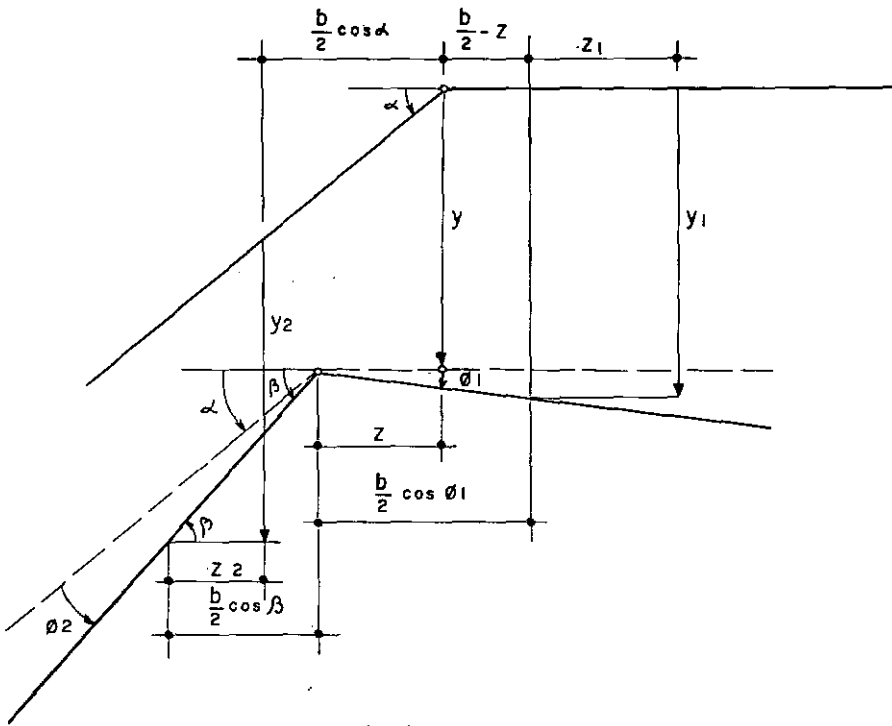


FIGURA 5

$$y = y_1 - \frac{b}{2} \phi_1 \quad (13)$$

$$y = y_2 + \frac{b}{2} \sin \alpha - \frac{b}{2} \sin (\alpha + \phi_2) \quad (13.a)$$

Igualando as expressões (13 e 13.a), e derivando duas vezes, resulta:

$$y_1'' - \frac{b}{2} \phi_1'' = y_2'' - \frac{b}{2} \phi_2'' \cos \alpha ; \text{ mas temos as expressões de}$$

ϕ_1'' e ϕ_2'' obtidas das equa

ções de Euler-Langrange, logo:

$$- 4 \beta (y_1'' - y_2'') = v_y + (v_y \cos \alpha - v_z \sin \alpha) \cos \alpha, \text{ onde } \beta = \frac{GJ_t}{b^2};$$

e ainda

$$z = z_1 \quad (14)$$

$$z = \frac{b}{2} \cos \alpha + z_2 - \frac{b}{2} \cos (\alpha + \phi_2) \quad (14.a)$$

Iguando (14) e (14.a), derivando 2 vezes e substituindo ϕ_2'' , resulta:

$$- 4 \beta (z_1'' - z_2'') = (v_z \sin \alpha - v_y \cos \alpha) \sin \alpha \quad (15)$$

2.1.6- Sistemas para Obtenção da Carga Crítica:

$$- 4 \beta (y_1'' - y_2'') = (v_y \cos \alpha - v_z \sin \alpha) \cos \alpha + v_y \quad (16)$$

$$- 4 \beta (z_1'' - z_2'') = (v_z \sin \alpha - v_y \cos \alpha) \sin \alpha$$

e

$$\frac{EI_\eta}{2} (2 y_2^{IV} \cos^2 \alpha - z_2^{IV} \sin 2\alpha) + \frac{EI_\xi}{2} (2 y_2^{IV} \sin^2 \alpha + z_2^{IV} \sin 2\alpha) - v_y = 0$$

$$\frac{EI_\eta}{2} (2 z_2^{IV} \sin^2 \alpha - y_2^{IV} \sin 2\alpha) + \frac{EI_\xi}{2} (2 z_2^{IV} \cos^2 \alpha + y_2^{IV} \sin 2\alpha) - v_z = 0$$

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + v_y = 0 \quad (17)$$

$$EI_y z_1^{IV} + N z_1'' + v_z = 0$$

De [16], tiramos as expressões de v_y e v_z , que levadas em (17), conduzem a um único sistema de equações em função de z , y e suas derivadas, bem como da carga crítica. Adotando expressões para y e z , que satisfaçam as condições de extremidades do problema, chegaremos ao valor da carga crítica.

2.1.7- Casos Particulares

2.1.7-1 - Peças num Mesmo Plano, $\alpha = 0$.

Podemos admitir que os deslocamentos na direção de z são desprezíveis em presença dos deslocamentos de y .

Resulta:

$$v_y = -2\beta (y_1'' - y_2'')$$

$$EI_z y_2^{IV} - v_y = 0 \quad (18)$$

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + v_y = 0$$

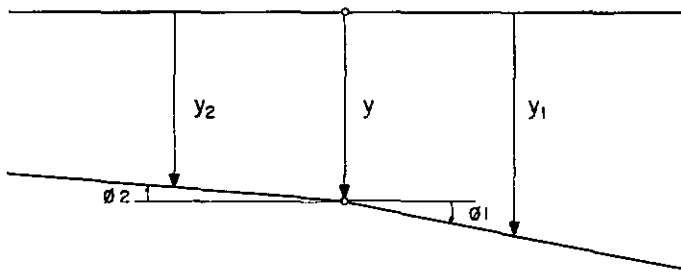


FIGURA 6

2.1.7-2 → Peças em planos perpendiculares, $\alpha = 90^\circ$:

$$- 4 \beta (y_1'' - y_2'') = v_y$$

$$EI_y y_2^{IV} - v_y = 0 \quad (19)$$

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + v_y = 0$$

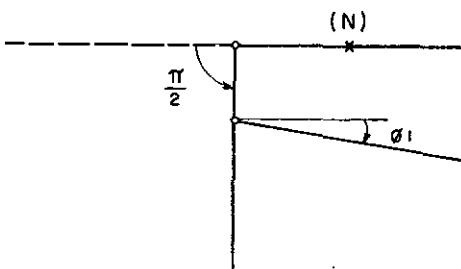


FIGURA 7

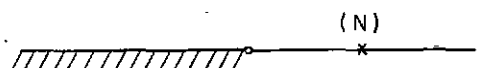


FIGURA 7a

2.2 - Associação Longitudinal com 3 pranchas, sendo a extrema carregada conforme a Figura 11.

2.2-1 - A expressão da energia potencial para a prancha (1):

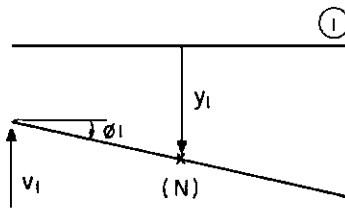


FIGURA 8

$$\pi p_1 = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} y_1''^2 + \frac{N^2}{2ES} + \frac{GJ_t}{2} \phi_1'^2 + v_1 y_1 - \frac{v_1 b}{2} \phi_1 - \right.$$

$$\left. \frac{N}{2} y_1'^2 \right] dx, \text{ aplicando as equações de Euler - Lagrange,}$$

virá:

$$EI y_1^{IV} + N y_1'' + v_1 = 0$$

(20)

$$\phi_1'' = - \frac{v_1 b}{2GJ_t}$$

2.2-2 Para a Prancha (2):

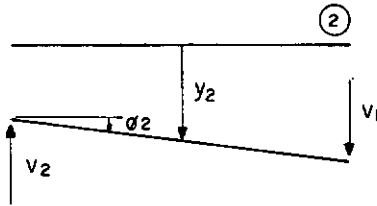


FIGURA 9

$$\pi p_2 = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} y_2''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_2'^2 - v_1 \cdot y_2 + v_2 y_2 - v_1 \frac{b}{2} \phi_2 - \right.$$

$$\left. v_2 \frac{b}{2} \phi_2 \right] dx, \text{ e virá:}$$

$$EI y_2^{IV} - v_1 + v_2 = 0$$

$$\phi_2'' = - \frac{b}{2GJ_t} (v_1 + v_2)$$

2.2-3 Para a Prancha (3):

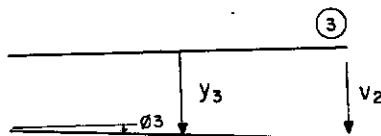


FIGURA 10

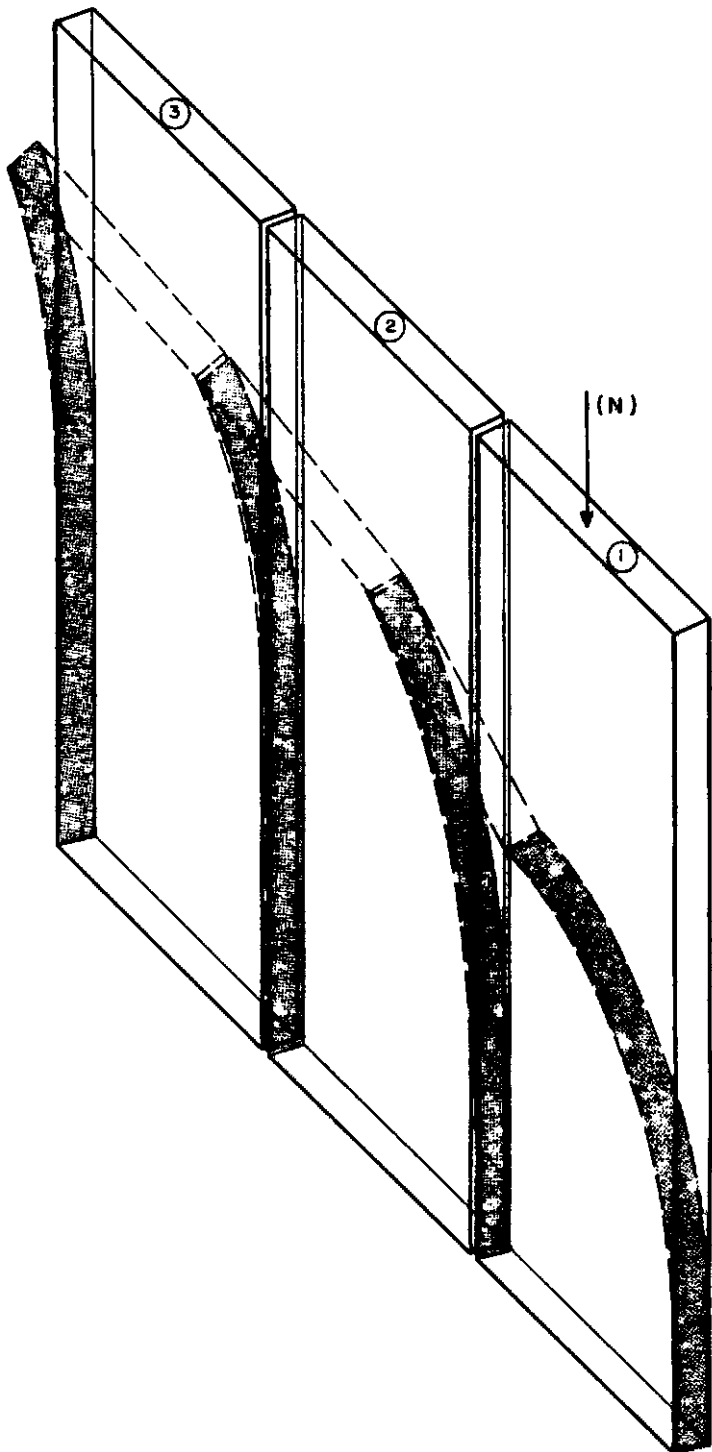


FIGURA II

$$\pi p_3 = \int_0^l \left[\frac{EI}{2} y_3''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_3'^2 - v_2 y_3 - v_2 \frac{b}{2} \phi_3 \right] dx \quad ; \quad e$$

também:

$$EI y_3^{IV} - v_2 = 0 \quad (22)$$

$$\phi_3'' = - \frac{v_2 b}{2GJ_t}$$

Das elásticas tiramos:

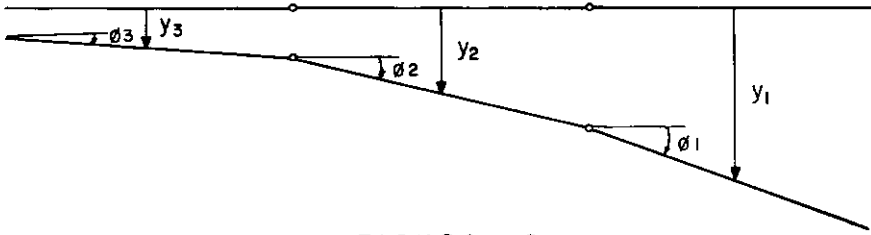


FIGURA 12

$$y_1 - \frac{b}{2} \phi_1 = y_2 + \frac{b}{2} \phi_2$$

$$y_2 - \frac{b}{2} \phi_2 = y_3 + \frac{b}{2} \phi_3$$

∴ derivando duas vezes e substituindo os ϕ_1'' e ϕ_2'' pelas suas expressões, virá:

2.2-4 Sistemas que Levarão à Carga Crítica:

$$4 \beta (y_2'' - y_1'') = 2v_1 + v_2 \quad (23)$$

$$4 \beta (y_3'' - y_2'') = v_1 + 2v_2$$

e os já encontrados

$$EI y_1^{IV} + N y_1'' + v_1 = 0$$

$$EI y_2^{IV} - v_1 + v_2 = 0 \quad (24)$$

$$EI y_3^{IV} - v_2 = 0$$

2.3 - Associação de 3 pranchas, sendo a central carregada conforme Figura 13. Considerando a deformada a seguir, podemos escrever para a prancha (1):

$$2.3-1 \quad \pi p_1 = \int_0^l \left| \frac{EI}{2} y_1''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_1'^2 - v_1 \cdot y_1 - v_1 \frac{b}{2} \phi_1 \right| dx ;$$

aplicando as equações de Euler-Lagrange, virá:

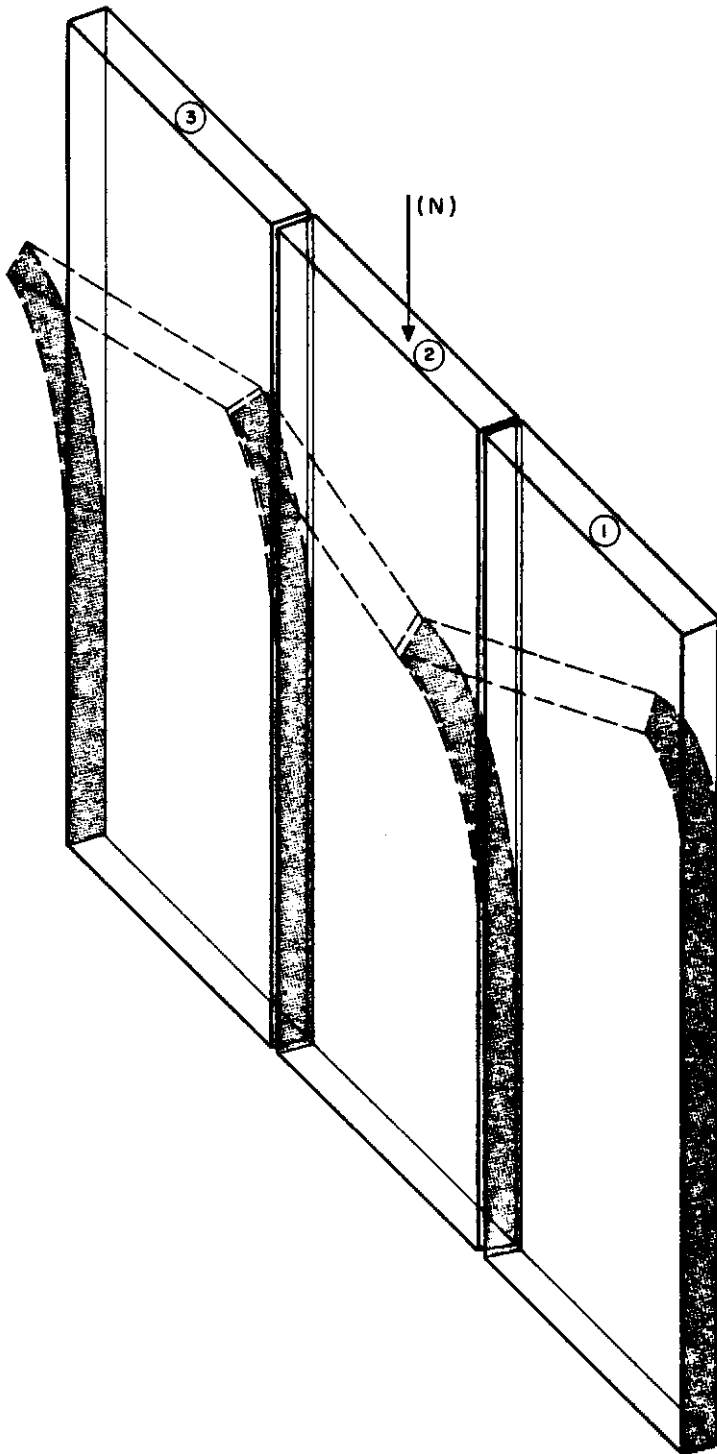


FIGURA 13

$$EI y_1^{IV} - v_1 = 0$$

e

$$\phi_1'' = - \frac{v_1 b}{2GJ_t}$$

2.3-2 Expressão do Potencial para a Prancha Carregada:

$$\pi_{p2} = \int_0^l \left| \frac{EI}{2} y_2''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_2'^2 + \frac{N^2}{2ES} + v_1 y_2 + v_2 y_2 - \right.$$

$$\left. v_2 \frac{b}{2} \phi_2 + v_1 \frac{b}{2} \phi_2 - \frac{N}{2} y_2'^2 \right| dx, \text{ bem como:}$$

$$EI y_2^{IV} + N y_2'' + v_1 + v_2 = 0$$

(25)

$$\phi_2 = - \frac{b(v_2 - v_1)}{2GJ_t}$$

2.3-3 Expressão do Potencial para a Prancha Extrema (3):

$$\pi_{p3} = \int_0^l \left| \frac{EI}{2} y_3''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_3'^2 - v_2 y_3 + v_2 \frac{b}{2} \phi_3 \right| dx,$$

teremos:

$$EI y_3^{IV} - v_2 = 0$$

(26)

$$\phi_3'' = \frac{v_2 b}{2GJ_t}$$

Das elásticas podemos tirar:

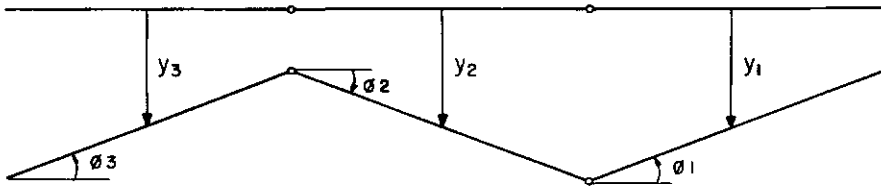


FIGURA 14

$$y_1 + \frac{b}{2} \phi_1 = y_2 + \frac{b}{2} \phi_2$$

$$y_2 - \frac{b}{2} \phi_2 = y_3 - \frac{b}{2} \phi_3$$

derivando duas vezes e substituindo pelas expressões de ϕ_1'' , ϕ_2'' e ϕ_3'' já encontradas, vem:

2.3-4 Sistemas que Levarão à Carga Crítica:

$$4 \beta (y_1'' - y_2'') - 2 v_1 + v_2 = 0 \quad (27)$$

$$4 \beta (y_2'' - y_3'') - v_1 + 2 v_2 = 0 ,$$

com o já encontrado

$$EI y_1^{IV} - v_1 = 0$$

$$EI y_2^{IV} + N y_2'' + v_1 + v_2 = 0 \quad (28)$$

$$EI y_3^{IV} - v_2 = 0$$

nos permite determinar N.

Para a deformada a seguir (Figura 15) encontramos os mesmos sistemas, o que significa:

As hastes associadas longitudinalmente, para as condições de extremidade compatíveis, no instante da flambagem, apresentam configuração de equilíbrio indiferente, coerente as sim com a teoria.

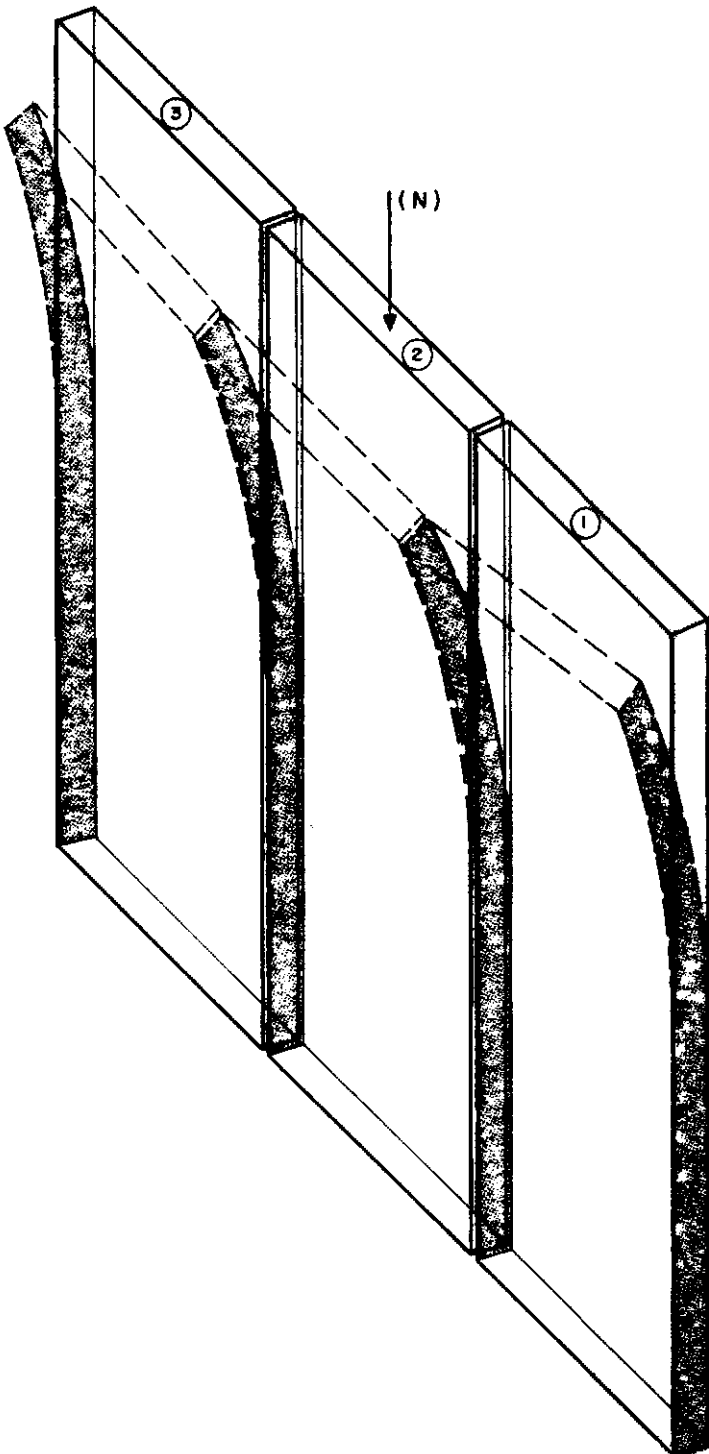
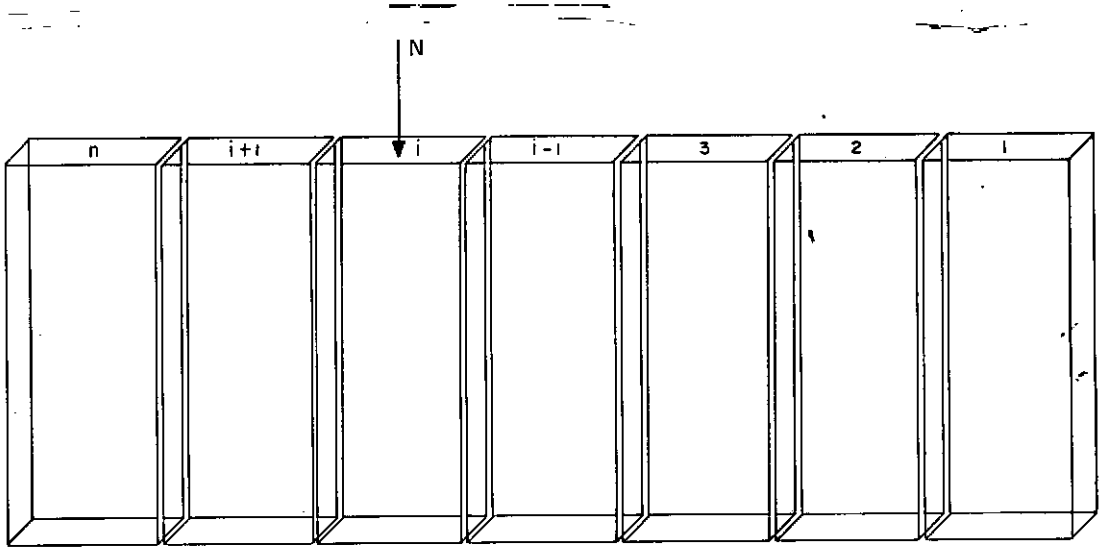
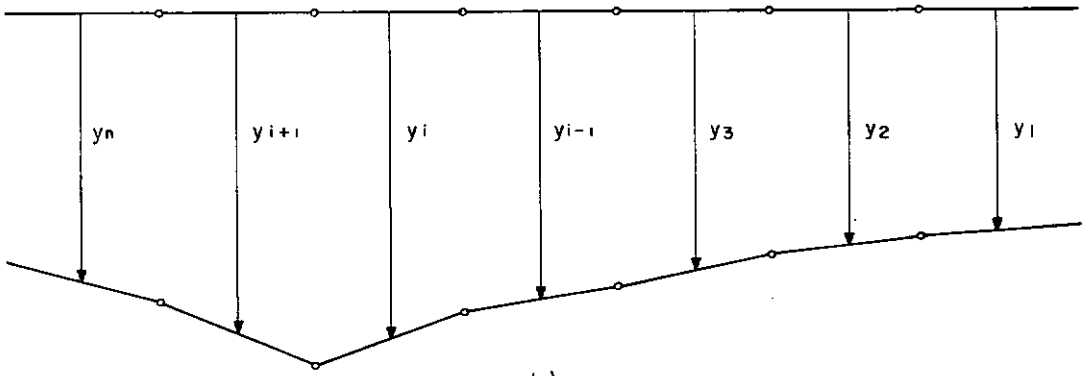


FIGURA 15

2.4- Generalização do Problema: η hastes associadas e uma única qualquer (i) carregada.



a)



b)

FIGURA 16

Com procedimento análogo obteremos:

2.4-1 Sistemas que Levarão à Carga Crítica:

$$4 \beta (y_1'' - y_2'') - 2 v_1 - v_2 = 0$$

$$4 \beta (y_2'' - y_3'') - v_1 - 2 v_2 - v_3 = 0$$

.....

$$4 \beta (y_{i-1}'' - y_i'') - v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i = 0$$

$$4 \beta (y_i'' - y_{i+1}'') - v_{i-1} + 2v_i + v_{i+1} = 0$$

$$4 \beta (y_{i+1}'' - y_{i+2}'') + v_1 + 2v_{i+1} + v_{i+2} = 0$$

(29)

$$EI y_1^{IV} - v_1 = 0$$

$$EI y_2^{IV} + v_1 - v_2 = 0$$

$$EI y_{i-1}^{IV} + v_{i-2} - v_{i-1} = 0 \quad (30)$$

$$EI y_i^{IV} + N y_i'' + v_{i-1} + v_i = 0$$

$$EI \ y_{i+1}^{IV} - v_{i+1} + v_i = 0$$

$$EI y_n^{IV} - v_{n-1} = 0$$

Esses dois sistemas podem ser utilizados para qualquer haste carregada, observando apenas que quando n for $(i+1)$, $v_{i+1} = v_n$, sendo v_{n-1} a última reação.

Quaisquer que sejam as condições de extremidades, resolvendo o primeiro sistema, determinamos as expressões de v em função das derivadas de y , que levadas a outro sistema nos permitirão determinar a carga crítica, adotando expressões para y , que satisfaçam as condições do problema em análise.

2.5 Outros casos de Associação em Planos Distintos

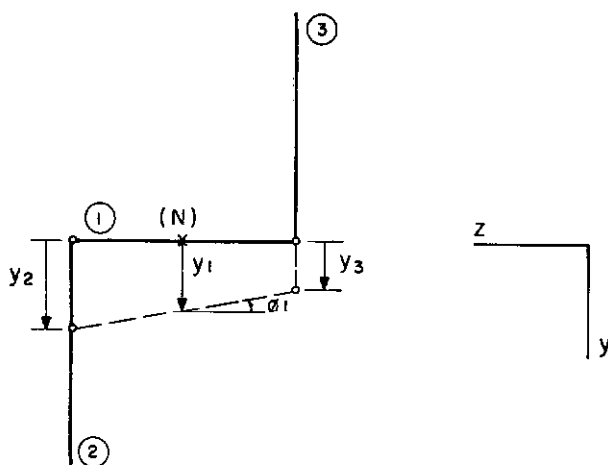


FIGURA 17

Para a prancha (1) teremos:

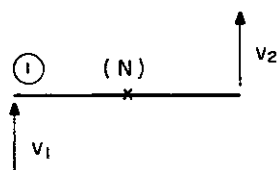


FIGURA 18

$$\pi_{P_1} = \int_0^{\ell} \left| \frac{EI_z}{2} y_1''^2 + \frac{N^2}{2ES} + \frac{GJ_t}{2} \phi_1'^2 - \frac{N}{2} y_1'^2 + y_1 (v_1 + v_2) \right| dx$$

$$\phi_1 - \frac{b}{2} (v_1 - v_2) \Big| dx, \text{ para } \delta\pi_{P_1} = 0 \text{ virá:}$$

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + v_1 + v_2 = 0$$

e

$$\phi_1'' = \frac{b(v_1 - v_2)}{2GJ_t}$$

Para a prancha (2):



FIGURA 19

$$\pi_{P_2} = \int_0^{\ell} \left| \frac{EI_y}{2} y_2''^2 - v_1 \cdot y_2 \right| dx ; \text{ virá:}$$

$$EI_y y_2^{IV} - v_1 = 0$$

Para a prancha (3):



FIGURA 20

$$\pi p_3 = \int_0^{\ell} \left| \frac{EI_y}{2} y_3''^2 + v_2 \cdot y_3 \right| dx \quad \therefore \text{virá:}$$

$$EI_y y_3^{IV} + v_2 = 0$$

$$\therefore v_2 = -EI_y y_3^{IV}$$

Das elásticas temos:

$$y_2 = y_1 + \frac{b}{2} \phi_1 \quad \therefore \quad y_2'' - y_1'' = \frac{b}{2} \cdot \frac{b(v_1 - v_2)}{2GJ_t}$$

$$y_3 = y_1 - \frac{b}{2} \phi_1 \quad \therefore \quad y_3'' - y_1'' = -\frac{b}{2} \cdot \frac{b(v_1 - v_2)}{2GJ_t}$$

logo:

$$4 \beta (y_2'' + y_3'' - 2 y_1'') = 0$$

$$(-y_3'' + y_2'') 4 \beta = 2 (v_1 - v_2)$$

mas

$$v_1 - v_2 = EI_y (y_2^{IV} + y_3^{IV})$$

Resulta então o sistema:

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + EI_y y_2^{IV} - EI_y y_3^{IV} = 0$$

$$4 \beta (-y_3'' + y_2'') - 2 EI_y (y_2^{IV} + y_3^{IV}) = 0 \quad (31)$$

$$4 \beta (-2 y_1'' + y_2'' + y_3'') = 0$$

b).

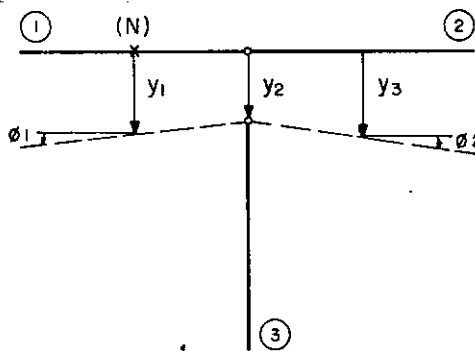


FIGURA 21

Para a prancha (1) teremos:

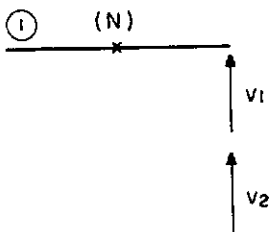


FIGURA 22

v_1 = Reação da prancha (2) com a (1);

v_2 = Reação da prancha (3) quanto ao deslocamento de (1) e (2) na direção de y .

$$\pi_{p_1} = \int_0^l \left| \frac{EI_z}{2} y_1''^2 + \frac{N^2}{2ES} + \frac{GJ_t}{2} \phi_1'^2 - \frac{N}{2} y_1' + v_1 \cdot y_1 + v_2 y_1 - (v_1 + v_2) \frac{b}{2} \phi_1 \right| dx, \quad \text{virá:}$$

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + v_1 + v_2 = 0$$

e

$$\phi_1'' = - \frac{(v_1 + v_2) b}{2GJ_t}$$

Para a prancha (2)

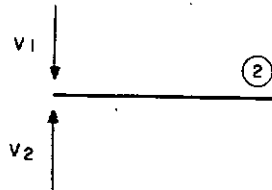


FIGURA 23

$$\pi_{p_2} = \int_0^l \left| EI_z y_2''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_2'^2 - v_1 y_2 + v_2 y_2 + v_1 \frac{b}{2} \phi_2 - v_2 \frac{b}{2} \phi_2 \right| dx ;$$

virá:

$$EI_z y_2^{IV} - v_1 + v_2 = 0$$

e

$$\phi_2'' = \frac{b (v_1 - v_2)}{2GJ_t}$$

Para a prancha (3):

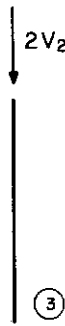


FIGURA 24

$$\pi_{p_3} = \int_0^l \left| EI_y y_3''^2 - 2v_2 \cdot y_3 \right| dx \quad \therefore \text{virá} \quad EI_y y_3^{IV} - 2v_2 = 0$$

Das elásticas tiramos:

$$y_3 = y_2 - \frac{b}{2} \phi_2$$

$$y_3 = y_1 - \frac{b}{2} \phi_1$$

\therefore derivando 2 vezes e substituindo ϕ_1'' e ϕ_2'' pelas suas expressões vem:

$$4\beta (y_3'' - y_2'') = v_2 - v_1$$

$$4\beta (y_3'' - y_1'') = v_2 + v_1$$

ficamos então com o sistema:

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + 4 \beta (y_3'' - y_1'') = 0$$

$$EI_z y_2^{IV} + 4 \beta (y_3'' - y_2'') = 0 \quad (32)$$

$$EI_y y_3^{IV} - 4 \beta (2 y_3'' - y_2'' - y_1'') = 0$$

2.6 - Casos Particulares analisados quanto às condições de Extremidade

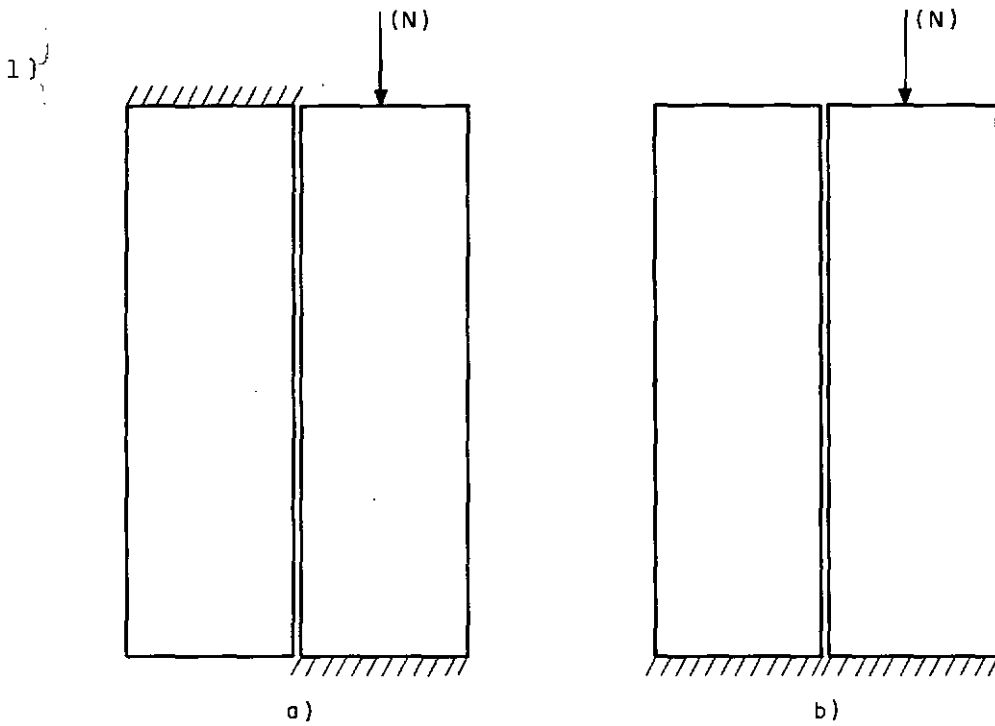


FIGURA 25

Apresentaram a mesma carga crítica, através da (18)

$$N = N_1 \left| 1 + \frac{1}{\frac{N_1}{2\beta} + 1} \right|, \quad \text{onde} \quad (33)$$

N_1 é a carga de Euler para prancha isolada:

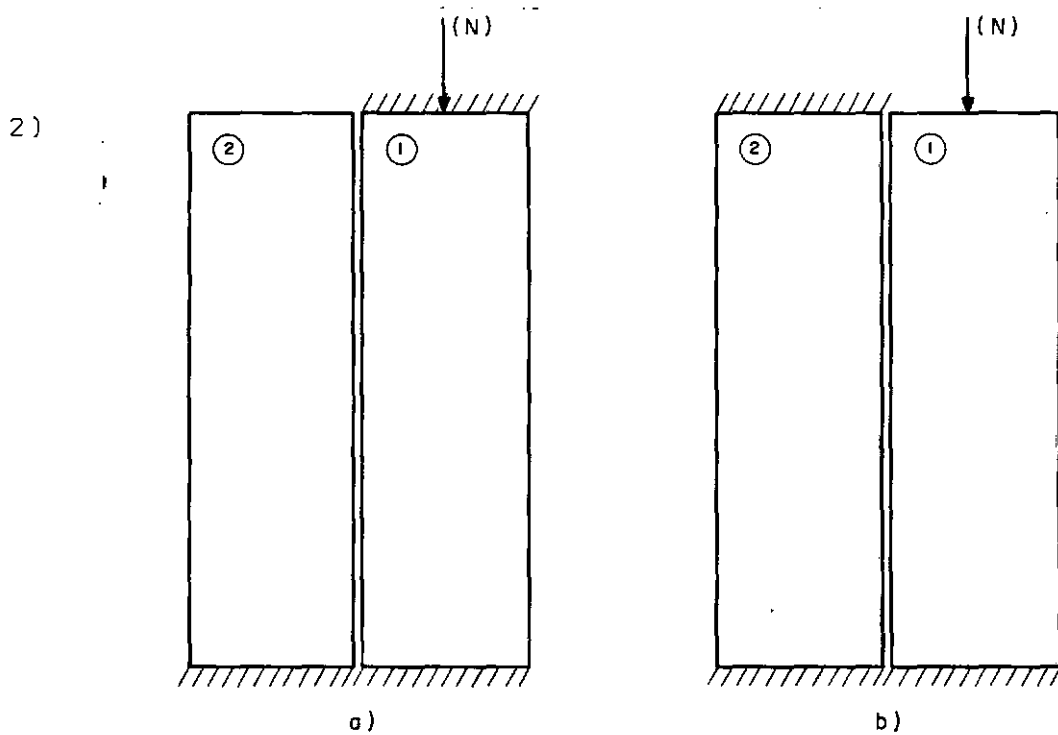


FIGURA 26

Para o caso (a)

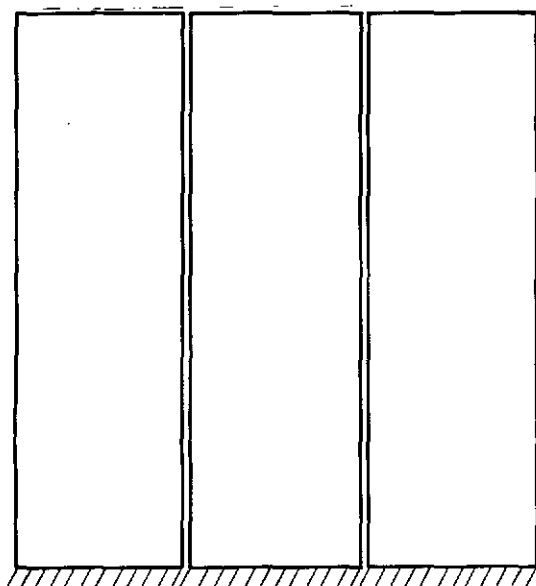
$$N = N_1 \left[1 + \frac{1}{\frac{N_1}{2\beta} + 16} \right] \quad (33.a)$$

Para o caso (b)

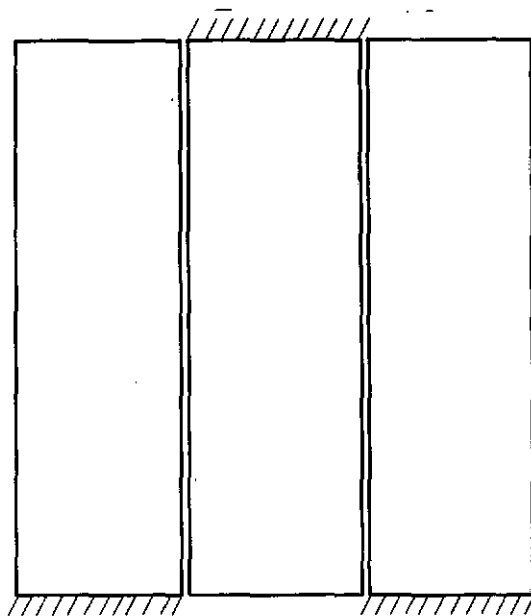
$$N = N_1 \left[1 + \frac{1}{\frac{N_1}{2\beta} + \frac{1}{16}} \right] \quad (33.b)$$

onde N_1 representa para cada caso a carga crítica da peça carregada isoladamente

3)



a)



b)

FIGURA 27

As condições de extremidades das Figuras 27.a e 27.b, para a prancha extrema carregada, apresentaram a mesma carga crítica.

As condições de extremidades das Figuras 27.a e 27.b, para a prancha central carregada, levaram à mesma carga crítica.

CAPÍTULO 3

Para melhor confronto com a bibliografia existente sobre o assunto, no presente capítulo passamos a adotar os seguintes eixos.

z = Eixo longitudinal da peça

y = Eixo paralelo à maior dimensão

x = Eixo paralelo à menor dimensão

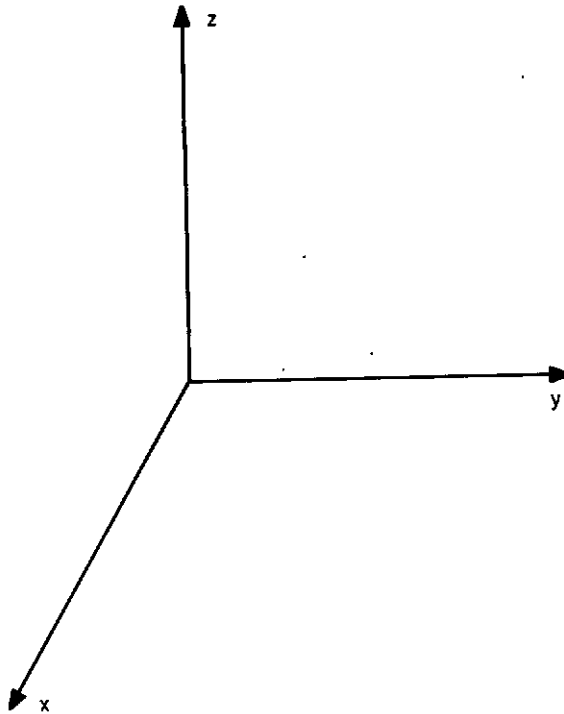


FIGURA 28

HASTES DE PAREDES DELGADAS

3.1 Considerações e Hipóteses Simplificadoras

No presente trabalho analisaremos as hastes longas.

Seja a peça:

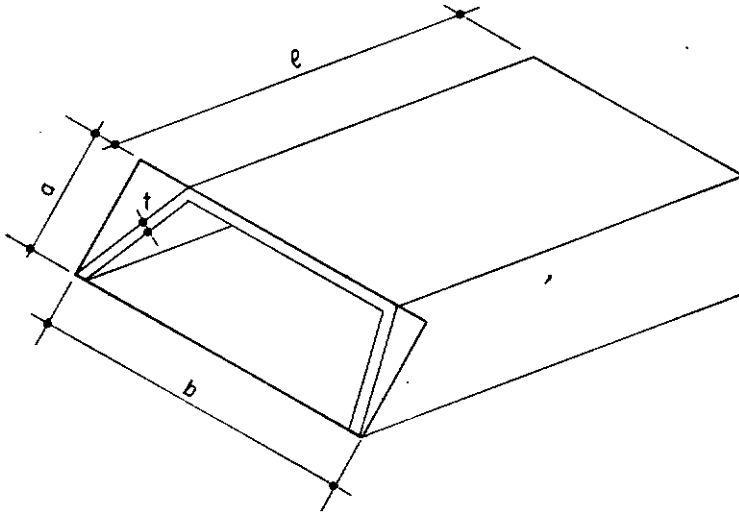


FIGURA 29

Uma haste é considerada longa, quando a relação entre a menor dimensão do menor retângulo que envolver a sua seção transversal e o seu comprimento for inferior a 0,10:

$$\frac{a}{e} < 0,10.$$

Uma haste é considerada de paredes delgadas quando a relação entre a espessura e a menor dimensão do menor retângulo que envolver a sua seção transversal for inferior a 0,10:

$$\frac{t}{a} < 0,10.$$

HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

1) Após a deformação da haste a seção transversal projeta-se indeformada no seu plano.

2) A superfície média da seção transversal não apresenta distorções.

3.2- Determinação das Grandezas de Geometria das Massas

Seja uma peça e um par de eixos ortogonais de polo qualquer o.

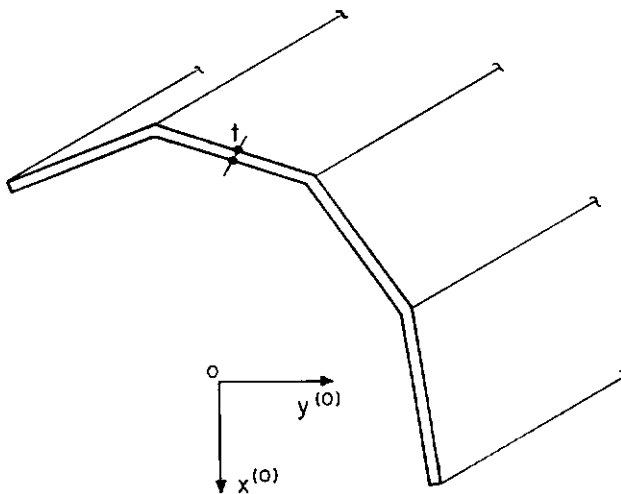


FIGURA 30

Temos então as já conhecidas expressões da geometria das massas.

- Área da seção transversal para espessura t constante.

$$\int t \, ds$$

- Momentos de 1.^a ordem.

$$E_z = \int y \, ds$$

$$E_y = \int x \, ds$$

- Momentos de 2.^a ordem

$$I_x = \int y^2 \, ds$$

$$I_y = \int x^2 \, ds$$

$$I_{yx} = \int yx \, ds$$

Representando a seção transversal pela linha média: teremos a situação da Figura 31, com o baricentro G e pólo o .

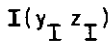


FIGURA 31

Se ligarmos esse ponto 0 às extremidades de um elemento infinitesimal ds da linha média, delimitaremos uma área infinitesimal dA

$$dA = \frac{r}{2} ds$$

Fazendo $dw = 2 \, dA$, teremos a grandeza:

$$\omega = \int_0^s r \, ds \quad , \text{ que é designada coeficiente de empenamento.}$$

A área A obtida é chamada superfície setorial,

e o diagrama que se obtém marcando ω sobre a normal a cada ponto do contorno s é denominada diagrama setorial ou dos coeficientes de empenamento. Assim podemos definir as grandezas:

- Momento setorial estático

$$E_{\omega} = \int^s \omega \, dS$$

- Produtos setorias de inércia

$$E_{y\omega} = \int^s x\omega \, dS$$

$$E_{x\omega} = \int^s y\omega \, dS$$

- Momento setorial de inércia

$$J_{\omega} = \int^s \omega^2 \, dS$$

Se escolhermos convenientemente os eixos x e y como principais de inércia baricêntricos, teremos:

$$E_y = E_x = 0$$

e

$$E_{yx} = 0$$

Sendo a origem "o", qualquer, podemos impor-lhe condições para que o momento estático setorial e os produtos setoriais de inércia em relação à ele sejam nulos. Portanto, chamando de "A" essa posição teremos:

$$E_{\omega y}(A) = E_{\omega x}(A) = 0 ;$$

sejam x_A e y_A as suas coordenadas em relação ao baricentro.

Fazendo:

$$\omega_G = \int^s r_G ds \text{ e notando que:}$$

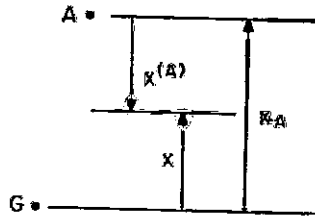
$$r_G = \overline{Go} \cos \psi + r \text{ podemos escrever:}$$

$$\omega_G = \overline{Go} \int^s \cos \psi ds + \omega = \overline{Go} n + \omega, \text{ sendo } n$$

a projeção do arco s sobre a normal a \overline{Go} . Essa expressão, de grande utilidade, permite calcular o coeficiente de empenamento relativo a um pólo o, quando se conhece o referente a G.

$$\text{As expressões } E_{\omega y}(A) = \int x^{(A)} \omega dS \text{ e}$$

$$E_{\omega x}(A) = \int y^{(A)} \omega ds \text{ podem ser escritas, notando que } x^{(A)} + x_A = x:$$



$$E_{\omega y}(A) = \int_0^s x \omega \, ds - x_A \int_0^s \omega \, ds = 0 ;$$

com a conveniente escolha da origem do arco s podemos por:

$$\int_0^s \omega \, ds = 0 ;$$

virá:

$$x_A = - \frac{E_{\omega G} x}{I_x}$$

de modo análogo:

$$y_A = \frac{E_{\omega G} y}{I_y}$$

O ponto com essas coordenadas é chamado centro de cisalhamento, ou centro de torção.

Peça Isolada

Se o plano principal em que estão agindo as forças, não é um plano de simetria da peça, a flexão, é comumente acompanhada de torção. O centro de cisalhamento é, como demonstra a teoria o ponto pelo qual deve passar o plano de atuação das cargas, para se eliminar essa torção.

Admitamos que carga crítica se distribua uniformemente na peça:

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

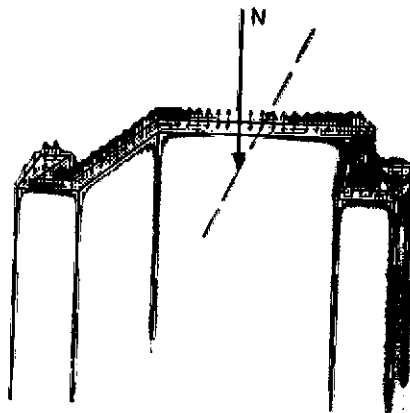


FIGURA 32

Compondo as tensões em faixas longitudinais, Fi
gura 33, podemos escrever:

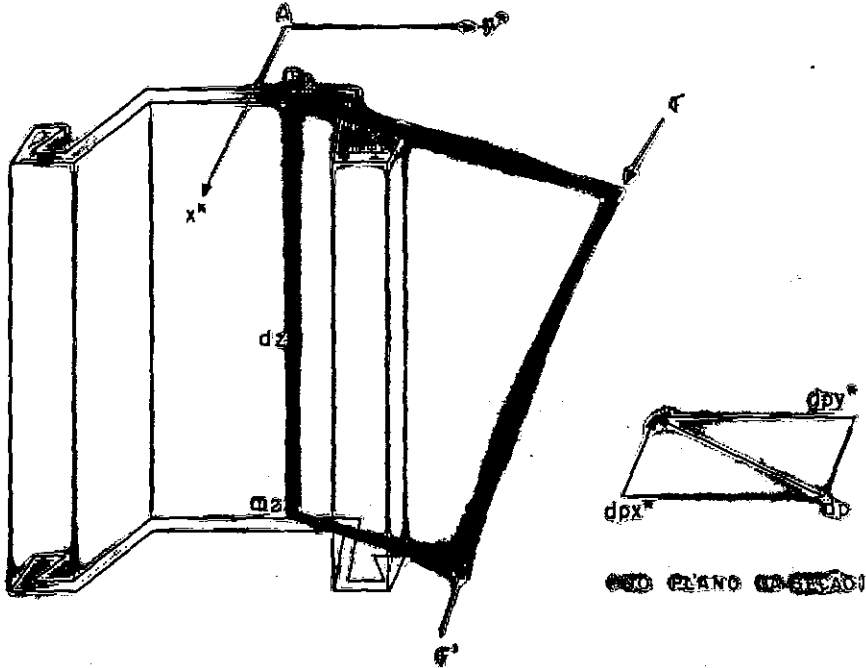


FIGURA 33

$$dpy = \frac{N}{S} t ds \eta''_m$$

$$dpx = \frac{N}{S} t ds \xi''_m ,$$

mas os deslocamentos do ponto m são:

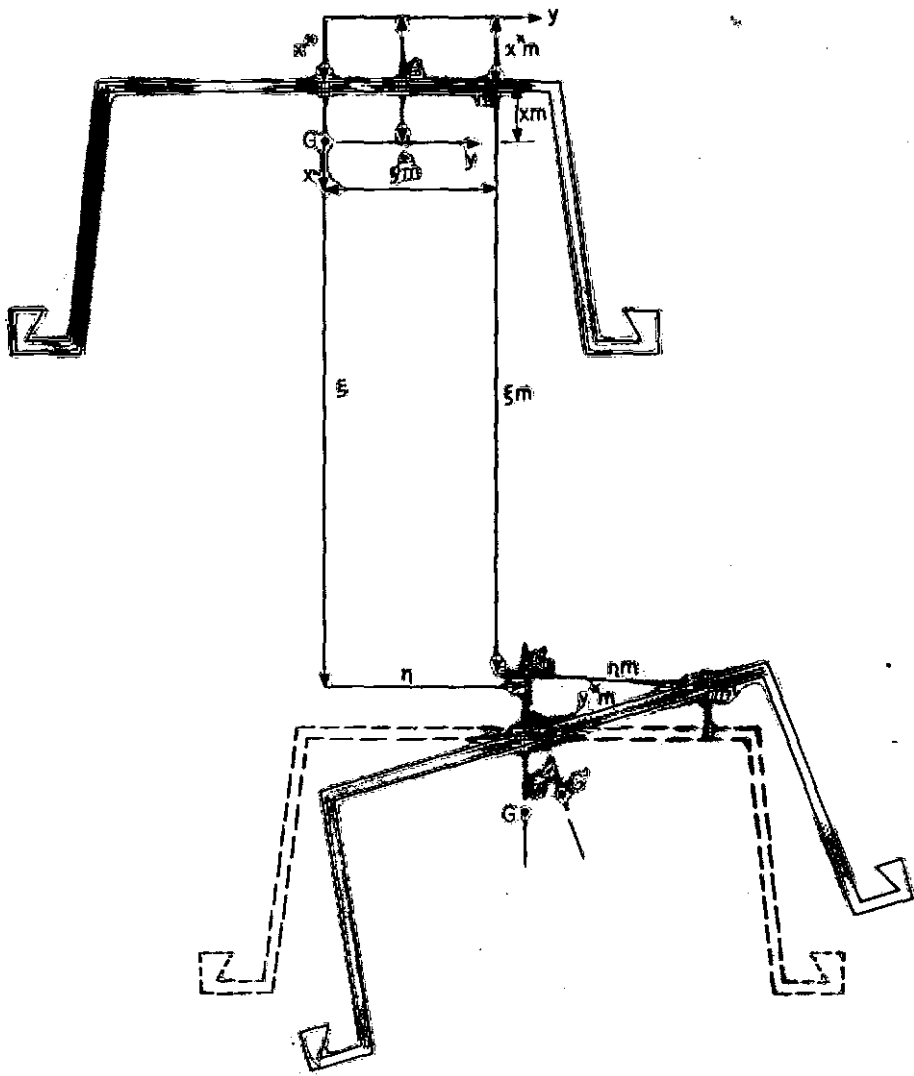


FIGURA 34

$$\xi_m = \xi - y_m^* \operatorname{sen} \phi \quad (34.a)$$

$$\eta_m = \eta + x_m^* \operatorname{sen} \phi \quad (34.b)$$

$$\xi_m = \xi - y_m^* \phi$$

$$\eta_m = \eta + x_m^* \phi$$

admitindo

$$\operatorname{sen} \phi \approx \phi$$

$$\cos \phi \approx 1 \quad \text{vem:}$$

Derivando duas vezes:

$$\xi_m'' = \xi'' - y_m^* \phi''$$

$$\eta_m'' = \eta'' + x_m^* \phi'' ,$$

logo:

$$dp_y = \frac{N}{S} t \, ds \, (\eta'' + x_m^* \phi''),$$

onde:

$$x_m^* = A - x_m ,$$

sendo x_m a coordenada do ponto m da seção transversal, em relação a eixos baricêntricos, e A , a distância do centro de cisalhamento ao centro de gravidade.

Cálculo de p_y

$$p_y = \frac{N}{S} \int_{s_0}^{s_0} (\eta'' + A \phi'' - x_m \phi'') \, ds$$

$$\therefore p_y = \frac{N}{S} \eta'' \int_{SO} ds + \frac{N}{S} A \phi'' \int_{SO} ds - \frac{N}{S} \phi'' \int_{SO} x_m ds$$

$$p_y = N (\eta'' + A \phi'') \quad (35)$$

Cálculo de p_x

$$dp_x = \frac{N}{S} t ds (\xi'' - y_m^* \phi'')$$

$$\therefore p_x = N \xi'' \quad (36)$$

Ao transportarmos p_y e p_x para o centro de cisalhamento, surgirá um momento torçor:

$$d_{mt} = dp_x \cdot y_m^* - dp_y \cdot x_m^*$$

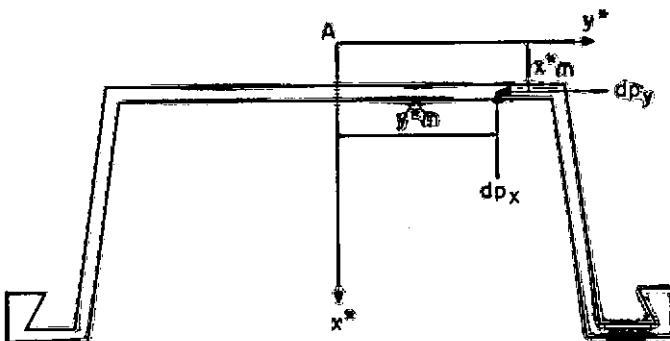


FIGURA 35

$$m_t = \int_{SO} (dp_x y_m^* - dp_x x_m^*) ds$$

$$m_t = \int_{SO} \left[\frac{N}{S} t ds (\xi'' - y_m^* \phi'') y_m - \frac{N}{S} t ds (\eta'' + x_m^* \phi'') x_m^* \right] ds$$

$$m_t = \frac{N}{S} \xi'' \int_{SO} y_m^* ds - \frac{N}{S} \int_{SO} y_m^{*2} ds - \frac{N}{S} \eta'' \int_{SO} x_m^* ds - \phi'' \int_{SO} x_m^{*2} ds$$

(37)

Considerando que $x_m^* = A - x_m$ resulta:

$$m_t = -N \eta'' A - \frac{N}{S} (I_x^* + I_y^*) \phi''$$

Passando I_x^* para I_x e I_y^* para I_y , aplicando o Teorema dos eixos paralelos vem:

$$I_x^* = I_x$$

$$I_y^* = I_y + A^2 S$$

$$m_t = -N \eta'' A - \frac{N}{S} (I_x + I_y) \phi'' - N A^2 \phi'' \quad (37.a)$$

Consideremos então, no cálculo da carga crítica, a seguinte disposição, Figura 36.

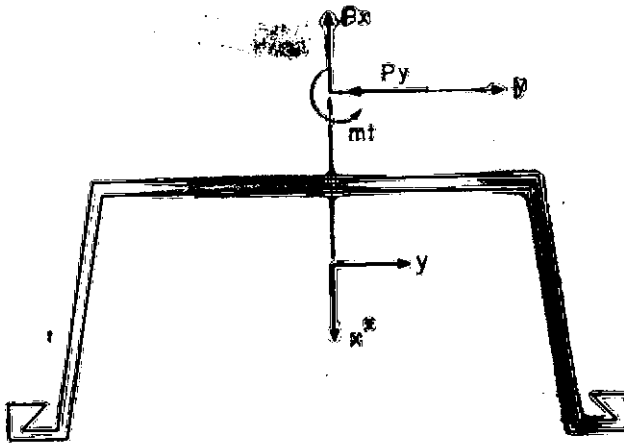


FIGURA 36

Isto posto mostremos que, na tensão normal total que atua na peça, teremos uma parcela ocasionada pelo momento de torção.

Consideremos a seção S de uma haste. Quando da atuação do momento torçor, teremos:

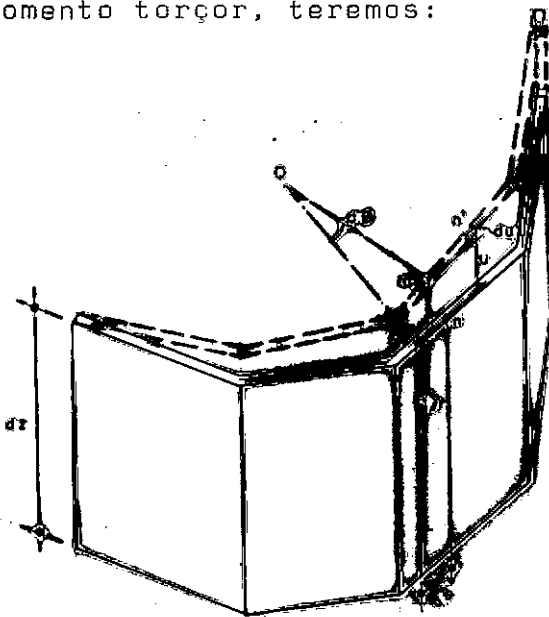


FIGURA 37

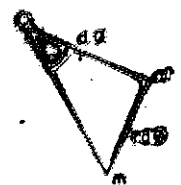
PROJEÇÃO SOBRE
O PLANO DE SEÇÃO

FIGURA 37a

Como na superfície média a distorção é nula, temos:

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial e}{\partial z} = 0$$

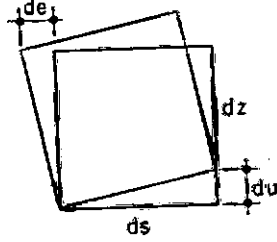


FIGURA 38

donde:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = - \frac{\partial e}{\partial x} - r\phi$$

integrando vem:

$$u = u_0 - \phi \int^s r ds = u_0 - \phi \omega = u_0 - \phi' \omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \omega \phi''$$

logo:

$$\sigma_T = E \xi_z = E \frac{du}{dz} \quad \therefore \quad \sigma_T = -E \omega \phi''$$

O equilíbrio exige que:

$$\int^s \sigma_T \omega ds = - \int^s E \omega \phi'' \omega ds = -E \phi'' \int^s \omega^2 ds$$

mas como já vimos que $\int^s \omega^2 ds$ é o momento setorial de inércia $J\omega$, portanto:

$$\int^s \sigma_T \omega ds = - E \phi'' J\omega, \text{ que Vlassov denominou}$$

Bimomento.

3.3-1 Determinação da energia interna de deformação devido ao Bimomento.

V_B = Energia interna de deformação devido ao bi momento:

$$V_B = \frac{1}{2} \int^v \sigma du dv$$

$$V_B = \frac{1}{2} \int_0^l \int^s (-E \omega \phi'') (-\omega \phi'') ds dz$$

$$V_B = \frac{1}{2} \int_0^l E \phi''^2 \int^s \omega^2 ds dz$$

mas

$$\int^s \omega^2 ds = J\omega$$

$$V_B = \frac{1}{2} \int_0^l E J \omega \phi''^2 dz \quad (38)$$

Podemos então calcular a carga crítica da peça isolada, através da energia, acrescentando essa parcela, que não existe nas peças maciças.

3.3-2 A expressão do Potencial é, pois:

$$\pi p = V_y + V_x + V_T + V_B + \Omega$$

onde:

V_y = Energia interna de deformação a flexão na direção de y

V_x = Energia interna de deformação a flexão na direção de x

V_T = Energia interna de deformação a torção

V_B = Energia interna de deformação ao bimomento

Ω = Energia potencial das cargas externas

$$\pi p = \int_0^l \left[\frac{EI_y}{2} \xi''^2 + \frac{EI_x}{2} \eta''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi'^2 + \frac{EJ_\omega}{2} \phi''^2 + \frac{P_y}{2} \eta + \frac{P_x}{2} \xi - \frac{m_t}{2} \phi \right] dz \quad (39)$$

ou, introduzindo as expressões de p_x , p_y e m_t .

$$\begin{aligned} \pi_p = & \int_0^l \left| \frac{EI_y}{2} \xi''^2 + \frac{EI_x}{2} \eta''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi'^2 + \frac{EJ_\omega}{2} \phi''^2 + \right. \\ & + \frac{N}{2} \{ N \eta'' + N A \phi'' \} + \frac{\xi}{2} N \xi'' + N A^2 \phi'' + \frac{\phi_2}{2} (N'' A + \\ & + \left. \frac{N}{S} (I_x + I_y) \phi'' \right| dz \quad [39.a] \end{aligned}$$

No instante da flambagem temos $\delta\pi_p = 0$, cumpre pois proceder à minimização do funcional:

$$\pi_p = \int_0^l I(\xi, \xi'', \eta, \eta'', \phi, \phi', \phi'') dz;$$

resulta:

$$\begin{aligned} \delta\pi_p = & \int_0^l \left| \frac{\partial I}{\partial \xi} \delta\xi + \frac{\partial I}{\partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial I}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial I}{\partial \phi'} \delta\phi' + \frac{\partial I}{\partial \phi''} \delta\phi'' + \right. \\ & + \left. \frac{\partial I}{\partial \xi''} \delta\xi'' + \frac{\partial I}{\partial \eta''} \delta\eta'' \right| dz \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\delta \pi_P = & \int_0^l \left[\frac{\partial I}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \xi''} \right) \delta \xi + \frac{\partial I}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \eta''} \right) \delta \eta + \right. \\
& + \frac{\partial I}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi'} \right) \delta \phi + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi''} \right) \delta \phi \Big| dz + \frac{\partial I}{\partial \xi''} \delta \xi \Big|_0^l - \\
& - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial I}{\partial \xi''} \right) \delta \xi \Big|_0^l + \frac{\partial I}{\partial \eta''} \delta \eta \Big|_0^l - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial I}{\partial \eta''} \right) \delta \eta \Big|_0^l + \\
& + \frac{\partial I}{\partial \phi'} \delta \phi \Big|_0^l + \frac{\partial I}{\partial \phi''} \delta \phi' \Big|_0^l - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi''} \right) \delta \phi \Big|_0^l = 0
\end{aligned}$$

o que nos leva a:

3.3-3 Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi''} \right) = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \xi} + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \xi''} \right) = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \eta} + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \eta''} \right) = 0$$

Condições de contorno:

$$\left| \frac{\partial I}{\partial \phi'} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi''} \right) \right| \delta \phi \Big|_0^l = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \phi''} \delta \phi' \Big|_0^l = 0 \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial \xi''} \delta \xi' \Big|_0^l = 0$$

(40.a)

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial I}{\partial \xi''} \right) \delta \xi \Big|_0^l = 0 \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial \eta''} \delta \eta' \Big|_0^l = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial I}{\partial \eta''} \right) \delta \eta \Big|_0^l = 0$$

que aplicadas ao funcional, permitem escrever:

3.3-4 Sistema que Levará à Carga Crítica:

$$EI_y \xi^{IV} + N \xi'' = 0$$

$$EI_x \eta^{IV} + N \eta'' + NA \phi'' = 0 \quad (41)$$

$$EJ_\omega \phi^{IV} + \phi'' \left| \frac{N}{S} (I_x + I_y) - GJ_t + NA^2 \right| + NA \eta'' = 0$$

Adotando expressões convenientes para ϕ , ξ e η ,

chegaremos à carga crítica.

3.4 Flambagem das Peças de Seção Retangular de Parede Delgada.

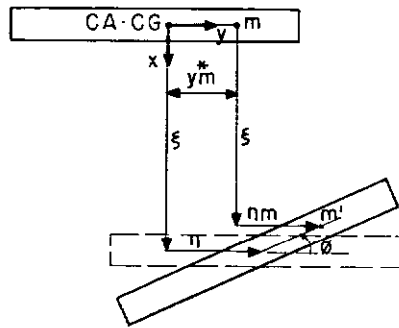


FIGURA 39

O ponto m pertencente ao elemento ds se deslocou de:

$$\xi_m = \xi - y_m^* \phi$$

$$\eta_m = \eta$$

∴ derivando duas vezes vem:

$$\xi_m'' = \xi'' - y_m^* \phi''$$

$$\eta_m'' = \eta''$$

Da tensão normal devido à flexão temos:

$$dp_x = \frac{N}{S} t ds \xi_m''$$

$$\therefore dp_x = \frac{N}{S} t ds (\xi_m'' - y_m^* \phi'')$$

$$dp_y = \frac{N}{S} \eta_m''$$

$$\therefore \frac{N}{S} t ds (\eta_m'')$$

\therefore integrando vem

$$p_x = N \xi''$$

$$p_y = N \eta''$$

O momento de torção que dp_x provoca no centro de cisalhamento é:

$$d_{m_t} = dp_x \cdot y_m^*$$

$$d_{m_t} = \frac{N}{S} t ds \xi_m'' \cdot y_m^*$$

$$\text{mas como } \xi_m'' = \xi'' - y_m \phi'' \text{ vem:}$$

$$\begin{aligned}
 m_t &= \int_0^{s_0} \frac{N}{S} t (\xi'' - y_m^* \phi'') y_m^* ds \\
 &= \frac{N}{S} \int_0^{s_0} y_m^{*2} \phi'' ds
 \end{aligned}$$

ou

$$m_t = \frac{N}{S} I_x^* \phi'' = \frac{N}{S} I_x \phi''$$

Teremos então a expressão da energia potencial

$$\begin{aligned}
 \pi_p &= \int_0^l \left[\frac{EI_y}{2} \xi''^2 + \frac{EI_x}{2} \eta''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi'^2 + \frac{N}{S} I_x \phi'' \frac{\phi}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + N \xi'' \frac{\xi}{2} + N \eta'' \frac{\eta}{2} \right] dz; \quad \text{para } \delta \pi_p = 0
 \end{aligned}$$

Chegaremos às equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial I}{\partial \xi} + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \xi''} \right) = 0$$

(42)

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi'} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \phi''} \right) = 0$$

e virá:

$$\frac{\partial I}{\partial \eta} + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \eta''} \right) = 0$$

$$EI_y \xi^{IV} + N \xi'' = 0$$

$$EI_x \eta^{IV} + N \eta'' = 0 \quad (43)$$

$$\phi'' \left(\frac{N}{S} I_x - GJ_t \right) = 0$$

observamos que no caso em que temos 2 eixos de simetria as flambagens em cada plano de flexão e torção são independentes entre si:

A primeira carga crítica é a de Euler

$$\rightarrow N = EI_y \frac{\pi^2}{\ell^2}$$

A segunda carga crítica é a de Euler

$$\rightarrow N = EI_x \frac{\pi^2}{\ell^2}$$

A terceira é a carga crítica por torção

A terceira equação ausente nas peças maciças é resultante da consideração do empenamento.

3.5 - ASSOCIAÇÃO LONGITUDINAL DE DUAS PEÇAS DELGADAS DE SEÇÃO ABERTA

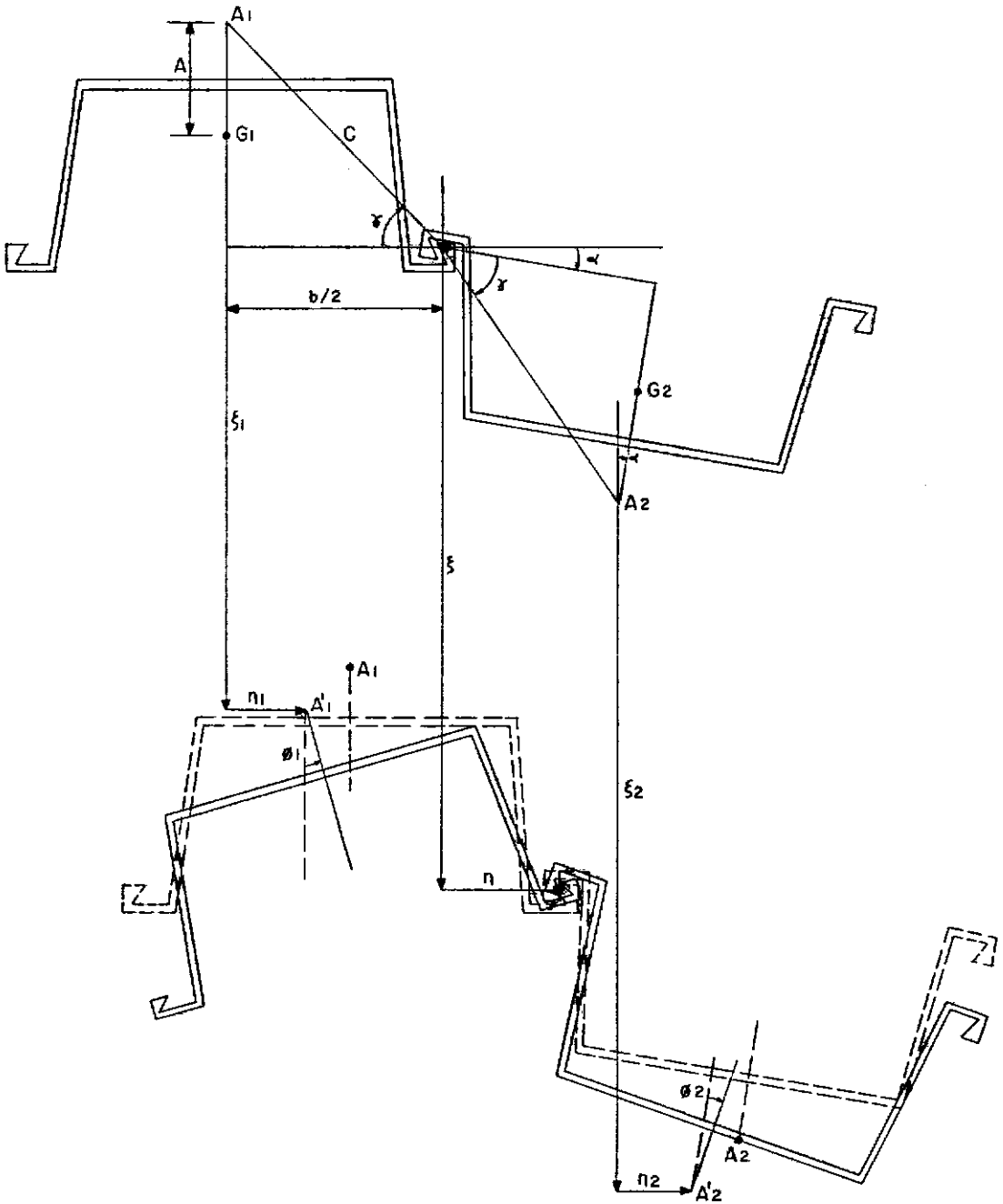


FIGURA 40

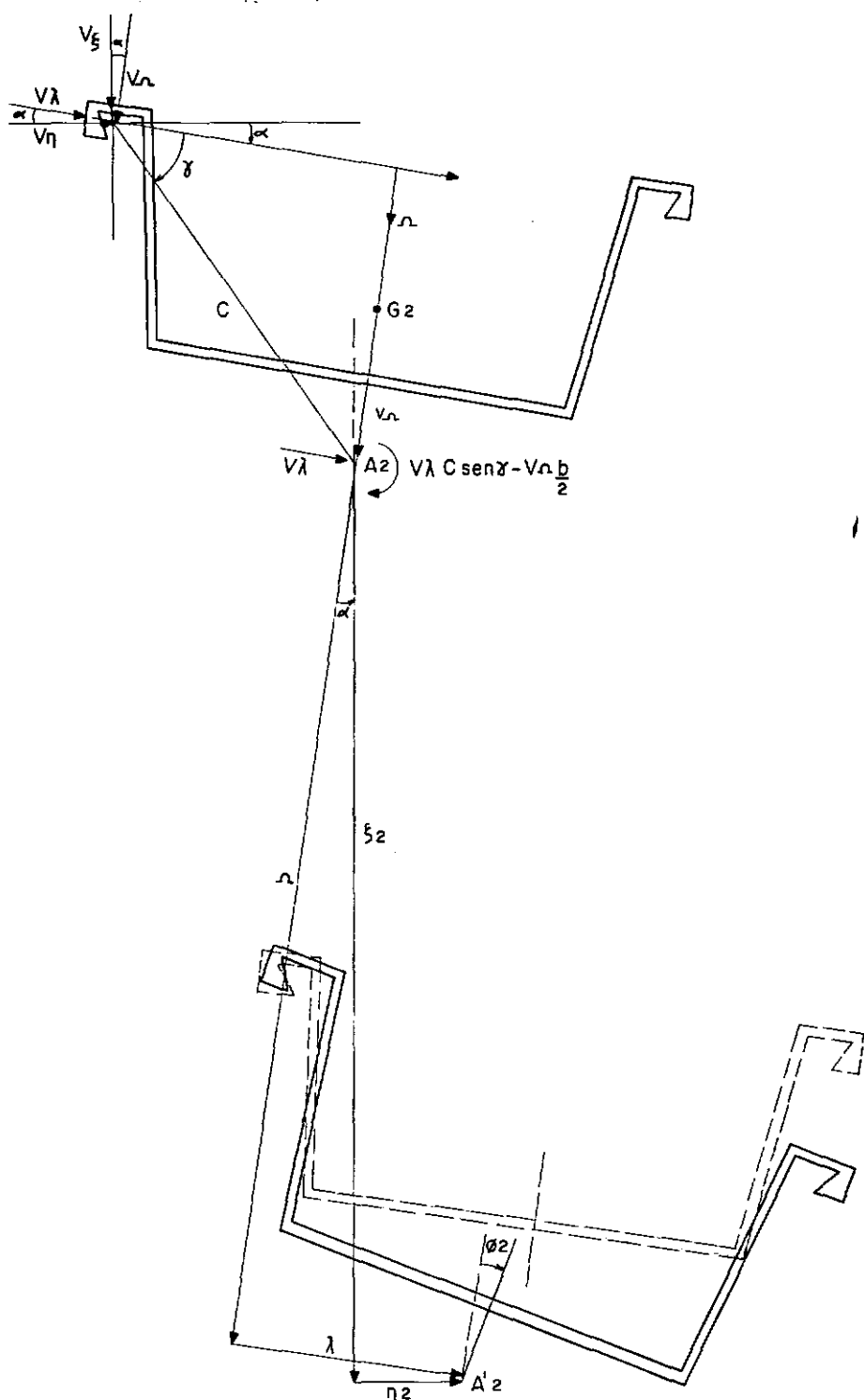


FIGURA 41

$$\Omega = \xi_2 \cos \alpha - \eta_2 \sin \alpha$$

$$\lambda = \xi_2 \sin \alpha + \eta_2 \cos \alpha$$

e

$$v_{\Omega} = v_{\xi} \cos \alpha - v_{\eta} \sin \alpha$$

$$v_{\lambda} = v_{\xi} \sin \alpha + v_{\eta} \cos \alpha$$

(Ω e λ os eixos indicados na Figura 41).

3.5-1 A expressão da energia potencial será:

$$\pi p_2 = \int_0^{\ell} \left| \frac{EI_{\lambda}}{2} \Omega_2''^2 + \frac{EI_{\Omega}}{2} \lambda_2''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_2'^2 + \frac{EJ_{\omega}}{2} \phi_2''^2 - \right. \\ \left. - v_{\Omega} \cdot \Omega_2 - v_{\lambda} \cdot \lambda_2 + \frac{b}{2} v_{\Omega} \phi_2 + v_{\lambda} C \sin \gamma \phi_2 \right| dz ;$$

por conseguinte:

$$\pi p_2 = \int_0^{\ell} \left| \frac{EI_{\lambda}}{2} (\xi_2''^2 \cos^2 \alpha - \xi_2'' \eta_2'' \sin 2\alpha + \eta_2''^2 \sin^2 \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{EI_{\Omega}}{2} (\xi_2''^2 \sin^2 \alpha + \xi_2'' \eta_2'' \sin 2\alpha + \eta_2''^2 \cos^2 \alpha) + \frac{GJ_t}{2} \phi_2'^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{EJ}{2} \phi_2''^2 - (v_\xi \cos \alpha - v_\eta \sin \alpha) (\xi_2 \cos \alpha - \eta_2 \sin \alpha) - \\
& - (v_\xi \sin \alpha + v_\eta \cos \alpha) (\xi_2 \sin \alpha + \eta_2 \cos \alpha) - (v_\xi \sin \alpha + \\
& + v_\eta \cos \alpha) C \sin \gamma \phi_2 + \frac{b}{2} \phi_2 (v_\xi \cos \alpha - v_\eta \sin \alpha) \Big| dz \\
& \hspace{15em} (44)
\end{aligned}$$

com:

$$\pi p_2 = \int_0^l I(\xi, \eta, \xi'', \eta'', \phi, \phi', \phi'') dz$$

para $\delta \pi_2 = 0$, chegaremos às equações de Euler-Lagrange e condições de contorno já apresentadas, e que aplicadas ao funcional conduzem a:

$$\frac{EI_\lambda}{2} (2 \xi_2^{IV} \cos^2 \alpha - \eta_2^{IV} \sin 2\alpha) + \frac{EI_\Omega}{2} (2 \xi_2^{IV} \cos^2 \alpha + \eta_2^{IV} \sin 2\alpha) - v_\xi = 0$$

$$\frac{EI_\lambda}{2} (2 \eta_2^{IV} \sin^2 \alpha - \xi_2^{IV} \sin 2\alpha) + \frac{EI_\Omega}{2} (2 \eta_2^{IV} \sin^2 \alpha + \xi_2^{IV} \sin 2\alpha) - v_\eta = 0$$

$$\begin{aligned}
& EJ_\omega \phi_2^{IV} - GJ_t \phi_2'' + v_\xi \left(\frac{b}{2} \cos \alpha - C \sin \gamma \sin \alpha \right) - v_\eta \left(\frac{b}{2} \sin \alpha + \right. \\
& \left. + C \sin \gamma \cos \alpha \right) = 0 \hspace{15em} (45)
\end{aligned}$$

- Análise da prancha (1) isolada.

3.5-2 A Expressão da Energia Potencial para a Prancha Carregada, é:

$$\begin{aligned} \pi p_1 = & \int_0^l \left[\frac{EI_y}{2} \xi_1''^2 + \frac{EI_x}{2} \eta_1''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_1'^2 + \frac{EJ_\omega}{2} \phi_1''^2 + \frac{P_y}{2} \eta_1 + \right. \\ & + \frac{P_x}{2} \xi_1 + v_\eta \cdot \eta_1 + v_\xi \cdot \xi_1 + \frac{N^2}{2ES} - v_\xi \frac{b}{2} \phi_1 + \\ & \left. + v_\eta \sin \gamma \phi_1 + \frac{\phi_1}{2} \left(N \eta_1'' A + \frac{I_x + I_y}{S} \phi_1'' N + N A^2 \phi_1'' \right) \right] dz \end{aligned} \quad (46)$$

OBSERVAÇÃO:

A energia devido a N, na deformação por flambagem, está explicitada pelas ações equivalentes de p_x , p_y e m_t .

No instante da flambagem temos $\delta \pi p_1 = 0$ e como

$$\pi p_1 = \int_0^l I (\xi, \xi_1'', \eta_1, \eta_1'', \phi_1, \phi_1', \phi_1'') dz, \text{ já conhecemos as}$$

equações para o caso, que aplicadas fornecem:

$$EI_y \xi_1^{IV} + N A \xi_1'' + v_\xi = 0$$

$$EI_x \eta_1^{IV} + N \eta_1'' + N A \phi_1'' + v_\eta = 0$$

$$EJ_{\omega} \phi_1^{IV} + NA \eta_1'' + N \phi_1'' \frac{I_x + I_y}{S} - GJ_t \phi_1'' + \frac{N}{2} A^2 \phi_1'' =$$

$$\frac{b}{2} v_{\xi} + v_{\eta} C \sin \gamma = 0 \quad ; \quad (47)$$

com as tres (3) já encontradas para a prancha (2) e considerando $I_{\lambda} = I_y$ e $I_{\Omega} = I_x$; conduzem a:

$$\frac{EI_y}{2} (2 \xi_2^{IV} \cos^2 \alpha - \eta_2^{IV} \sin 2\alpha) + \frac{EI_x}{2} (2 \xi_2^{IV} \sin^2 \alpha + \eta_2^{IV} \sin 2\alpha) - v_{\xi} = 0$$

$$\frac{EI_y}{2} (2 \eta_2^{IV} \sin^2 \alpha - \xi_2^{IV} \sin 2\alpha) + \frac{EI_x}{2} (2 \eta_2^{IV} \cos^2 \alpha + \xi_2^{IV} \sin 2\alpha) - v_{\eta} = 0$$

$$EJ_{\omega} \phi_2^{IV} - GJ_t \phi_2'' + v_{\xi} \left(\frac{b}{2} \cos \alpha - C \sin \gamma \sin \alpha \right) - v_{\eta} \left(\frac{b}{2} \sin \alpha + C \sin \gamma \cos \alpha \right) = 0 \quad (48)$$

Precisamos pois, de mais duas equações para termos o sistema solucionável.

Das elásticas temos:

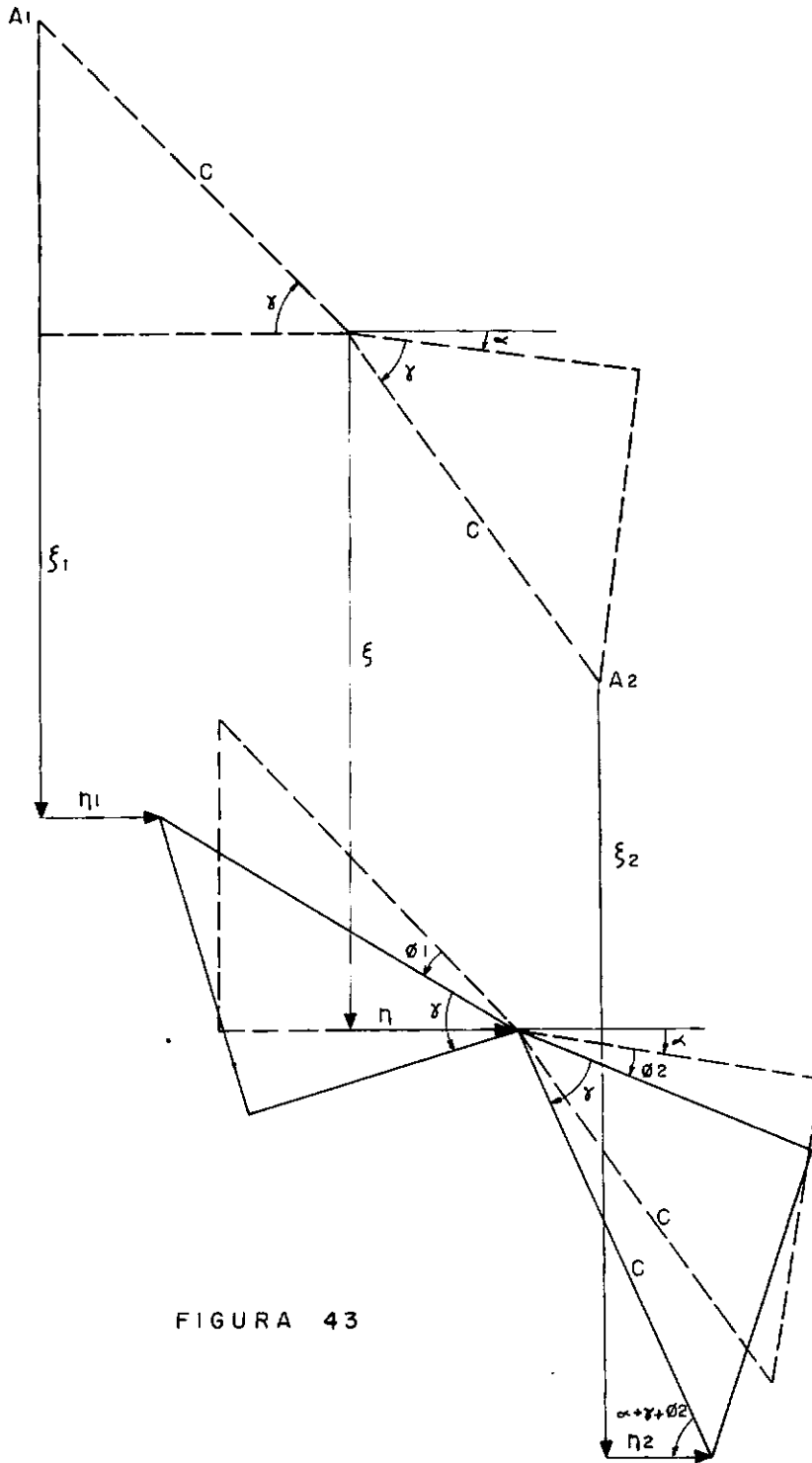


FIGURA 43

$$\xi + C \operatorname{sen} (\alpha + \gamma + \phi_2) = \xi_2 + C \operatorname{sen} (\alpha + \gamma)$$

$$\xi = \xi_1 - (C \operatorname{sen} \gamma - C \operatorname{sen} (\gamma - \phi_1))$$

$$\therefore \xi = \xi_2 + C \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) - C \operatorname{sen} (\gamma + \alpha + \phi_2)$$

$$\therefore \xi = \xi_1 - (C \operatorname{sen} \gamma - C \operatorname{sen} (\gamma - \phi_1))$$

Pela prancha (2) temos:

$$\eta + C \cos (\alpha + \gamma + \phi_2) = \eta_2 + C \cos (\alpha + \gamma)$$

$$\therefore \eta = \eta_2 + C \cos (\alpha + \gamma) - C \cos (\alpha + \gamma + \phi_2)$$

e pela prancha (1):

$$\eta + C \cos \gamma = \eta_1 + C \cos (\gamma - \phi_1)$$

$$\therefore \eta = \eta_1 + C \cos (\gamma - \phi_1) - C \cos \gamma$$

Igualando as duas expressões de ξ e as de η vem:

$$\eta_1 - \eta_2 + C \phi_1 \operatorname{sen} \gamma - C \phi_2 \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) = 0$$

$$\xi_2 - \xi_1 + C \phi_1 \cos \gamma - C \phi_2 \cos (\alpha + \gamma) = 0$$

derivando duas vezes:

$$\eta_1'' - \eta_2'' + C \phi_1'' \operatorname{sen} \gamma - C \phi_2'' \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) = 0$$

$$\xi_2'' - \xi_1'' - C \phi_1'' \cos \gamma - C \phi_2'' \cos (\alpha + \gamma) = 0$$

De (47) vem:

$$v_{\xi} = - (EI_y \xi_1^{IV} + NA \xi_1'')$$

$$v_{\eta} = - (EI_x \eta_1^{IV} + N\eta_1'' + NA \phi_1'') ,$$

que levadas nas demais equações permitem-nos escrever:

3.5-3 Sistema que Levará à Carga Crítica

$$EJ_{\omega} \phi_1^{IV} + NA \eta_1'' + \phi_1'' \left(N \frac{I_x + I_y}{S} - GJ_t + \frac{N}{2} A^2 - NA C \sin \gamma \right) +$$

$$+ \frac{b}{2} EI_y \xi_1^{IV} + \frac{b}{2} NA \xi_1'' - EI_x C \sin \gamma \eta_1^{IV} - NC \sin \gamma \eta_1'' = 0$$

$$EJ_{\omega} \phi_2^{IV} - GJ_t \phi_2'' - (EI_y \xi_1^{IV} + NA \xi_1'') \left(-\frac{b}{2} \cos \alpha - C \sin \alpha \sin \gamma \right) +$$

$$+ (EI_x \eta_1^{IV} + N \eta_1'' + NA \phi_1'') \cdot \left(-\frac{b}{2} \sin \alpha + C \sin \gamma \cos \alpha \right) = 0$$

$$\frac{EI_y}{2} (2 \xi_2^{IV} \cos^2 \alpha - \eta_2^{IV} \sin 2\alpha) + \frac{EI_x}{2} (2 \xi_2^{IV} \sin^2 \alpha + \eta_2^{IV} \sin 2\alpha) +$$

$$EI_y \xi_1^{IV} + NA \xi_1'' = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI_y}{2} (2 \eta_2^{IV} \sin^2 \alpha - \xi_2^{IV} \sin 2\alpha) + \frac{EI_x}{2} (2 \eta_2^{IV} \cos^2 \alpha + \xi_2^{IV} \sin 2\alpha) + \\ & + EI_x \eta_1^{IV} + N \eta_1'' + N A \phi_1'' = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\eta_1'' - \eta_2'' + C \sin \gamma \phi_1'' - C \sin (\alpha + \gamma) \phi_2'' = 0$$

$$\xi_2'' - \xi_1'' + C \cos \gamma \phi_1'' - C \cos (\alpha + \gamma) \phi_2'' = 0$$

Adotando expressões para ξ_1 , ξ_2 , η_1 , η_2 , ϕ_1 , ϕ_2 , que satisfaçam às condições de contorno do problema, uma vez que na flambagem o equilíbrio é indiferentes, podemos avaliar a carga crítica.

3.5-4 Caso Particular

1) $\alpha = 0$ e $\gamma \neq 0$ (Ver Figura 40)

$$EJ_\omega \phi_1^{IV} + N A \phi_1'' + \phi_1'' \left(N \frac{I_x + I_y}{S} - GJ_t + \frac{N}{2} A^2 \right) + \frac{b}{2} EI_y \xi_1^{IV} +$$

$$\frac{b}{2} N A \xi_1'' - C \sin \gamma (EI_x \eta_1^{IV} + N \eta_1'' + N A \phi_1'') = 0$$

$$EJ_{\omega} \phi_2^{IV} - GJ_t \phi_2'' - \frac{b}{2} EI_y \xi_1^{IV} - \frac{b}{2} NA \xi_1'' + C \sin \gamma (EI_x \eta_1^{IV} + N \eta_1'' + NA \phi_1'') = 0$$

$$EI_y \xi_2^{IV} + EI_y \xi_1^{IV} + NA \xi_1'' = 0 \quad (50)$$

$$EI_x \eta_1^{IV} + N \eta_1'' + NA \phi_1'' + EI_x \eta_2^{IV} = 0$$

$$\eta_1'' - \eta_2'' + C \sin \gamma \phi_1'' - C \sin \gamma \phi_2'' = 0$$

$$\xi_2'' - \xi_1'' + C \cos \gamma \phi_1'' - C \cos \gamma \phi_2'' = 0$$

3.6 Associações de Peças de Seção Retangular de Paredes Delgadas

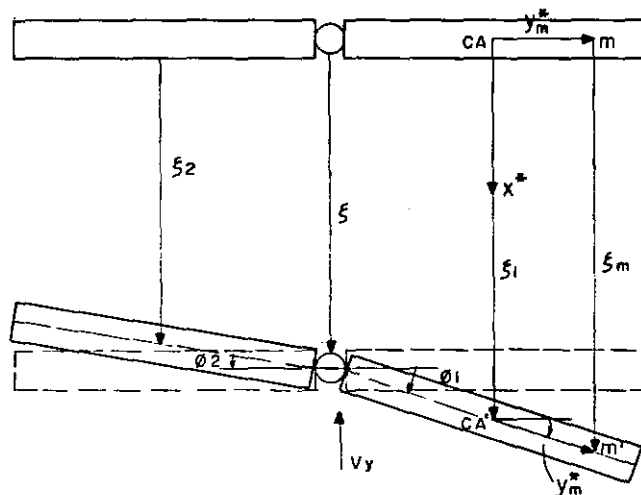


FIGURA 44

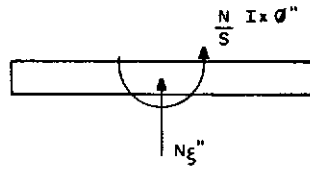


FIGURA 45

Para a prancha (2) teremos:

$$\pi_{p_2} = \int_0^{\ell} \left| \frac{EI_y}{2} \xi_2''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_1'^2 - v_y \xi_2 - v_y \frac{b}{2} \phi_2 \right| dz ;$$

virá:

$$EI_y \xi_2^{IV} - v_y = 0$$

e

$$\phi_2'' = - \frac{v_y b}{2 GJ_t}$$

Para a prancha (1) teremos:

$$\pi_{p_1} = \int_0^{\ell} \left| \frac{EI_y}{2} \xi_1''^2 + \frac{GJ_t}{2} \phi_1'^2 + \frac{\phi_1}{2} \cdot \frac{N}{S} I_x \phi_1'' + \frac{\xi_1}{2} \cdot N \xi_1'' + v_y \cdot \xi_1 - v_y \frac{b}{2} \phi_1 \right| dz \quad (51)$$

Portanto, para $\delta\pi p_1 = 0$, virá:

$$EI_y \xi_1^{IV} + N \xi_1'' + v_y = 0$$

e

$$\phi_1'' \left(\frac{N}{S} I_x - GJ_t \right) - v_y \frac{b}{2} = 0$$

Mas das elásticas temos:

$$\xi_2 + \frac{b}{2} \phi_2 = \xi_1 - \frac{b}{2} \phi_1$$

∴ derivando duas vezes virá:

$$\xi_2'' - \xi_1'' + \frac{b}{2} \phi_2'' + \frac{b}{2} \phi_1'' = 0$$

mas

$$\phi_2'' = - \frac{v_y b}{2 GJ_t}$$

e

$$\phi_1'' = \frac{v_y b}{2 \left(\frac{N}{S} I_x - GJ_t \right)}$$

logo:

$$\xi_2'' - \xi_1'' - \frac{v_y b^2}{4 GJ_t} \left(\frac{1}{GJ_t} - \frac{1}{\frac{N}{S} I_x - GJ_t} \right) = 0$$

resulta o sistema:

$$EI_y \xi_1^{IV} + N \xi_1'' + EI_y \xi_2^{IV} = 0$$

(52)

$$EI_y \xi_2^{IV} \left(\frac{1}{\frac{N}{S} I_x - GJ_t} - \frac{1}{GJ_t} \right) + 4\beta (\xi_1'' - \xi_1'') = 0$$

adotando expressões para ξ_2 e ξ_1 teremos o valor da carga crítica.

CAPÍTULO 4PARTE APLICADA REFERENTE AO CAP. 2

Para o confronto entre o comportamento da haste isolada e o da mesma haste nas associações longitudinais, façamos algumas determinações numéricas.

Seja uma haste com as seguintes características:

$$E = \text{Módulo de elasticidade longitudinal} = 21 \times 10^5 \text{ t / m}^2$$

$$G = \text{módulo de elasticidade transversal} = 9 \times 10^5 \text{ t / m}^2$$

Seção retangular: $b = 0,60 \text{ m}$ e $h = 0,15 \text{ m}$

Condições de extremidades: Bi-rotulada.

Temos então:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = 1,687 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$J_t = \frac{bh^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{h}{b} \right) = 5,68 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Carga crítica da peça isolada:

$$N_1 = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = 97,13 \text{ t}$$

- Com duas pranchas associadas longitudinalmente teremos, conforme (33.a)

$$N = N_1 \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{N_1}{2\beta}} \right)$$

onde $\beta = \frac{GJ_t}{b^2} = 1420$,

logo:

$$N = 191,04 \text{ t} \quad \text{e} \quad \alpha' = \frac{N}{N_1} = 1,967$$

- Caso de 3 pranchas com a extrema carregada.

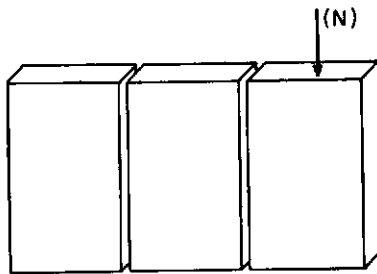


FIGURA 46

Com as equações 23 e 24 e adotando:

$$y_1 = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$y_2 = a_2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$y_3 = a_3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

virã o determinante

$$\begin{vmatrix} -N_1 + N - \frac{2}{3}\beta & + 4\beta & - \frac{4}{3}\beta \\ 4\beta & -N_1 - 8\beta & + 4\beta \\ -\frac{4}{3}\beta & 4\beta & -N_1 - \frac{8}{3}\beta \end{vmatrix} = 0$$

resulta:

$$N = 272,09 \text{ t}$$

$$\alpha' = \frac{N}{N_1} = 2,801$$

- Caso de 4 pranchas associadas, sendo carregada a da extremide. De 29 e 30 vem:

$$EI y_1^{IV} + N y_1'' + \beta (-3y_1'' + 5y_2'' - 3y_3'' + y_4'') = 0$$

$$EI y_2^{IV} + \beta (5y_1'' - 11 y_2'' + 9 y_3'' - 3 y_4'') = 0$$

$$EI y_3^{IV} + \beta (-3 y_1'' + 9 y_2'' - 11 y_3'' + 5 y_4'') = 0$$

$$EI y_4^{IV} + \beta (y_1'' - 3 y_2'' + 5 y_3'' - 3 y_4'') = 0$$

para:

$$y_1 = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$y_2 = a_2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$y_3 = a_3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$y_4 = a_4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

resulta:

$$N = 326,80 \text{ t}$$

$$\alpha' = \frac{N}{N_1} = 3,36$$

- Caso de 3 pranchas, sendo a intermediária carregada.

Resolvendo o determinante,

$$\begin{vmatrix} -N_1 - \frac{8}{3}\beta & 4\beta & -\frac{4}{3}\beta \\ 4\beta & -N_1 - N + \frac{8}{3}\beta & 4\beta \\ -\frac{4}{3}\beta & 4\beta & -N_1 - \frac{8}{3}\beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore N = 289,35 \text{ t}$$

$$\alpha' = 2,97$$

- Resolvendo a mesma haste, com outras condições de extremides:



$$y = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

FIGURA 47

- Caso de 2 pranchas:

$$N = 48,30 \text{ t}$$

$$\alpha' = 1,991$$

- Caso de 3 pranchas, sendo a da extremidade carregada:

$$N = 71,37 \text{ t}$$

$$\alpha' = 2,95$$

- Caso de 4 pranchas, sendo a da extremidade carregada:

$$N = 88,90 \text{ t}$$

$$\alpha' = 3,66$$

- Caso de 3 pranchas, sendo a intermediária carregada:

$$N = 71,88 \text{ t}$$

$$\alpha' = 2,965$$

PEÇAS COM EIXOS PRINCIPAIS EM PLANOS DISTINTOS

Para $\alpha' = 45^\circ$ e hastes bi-rotuladas

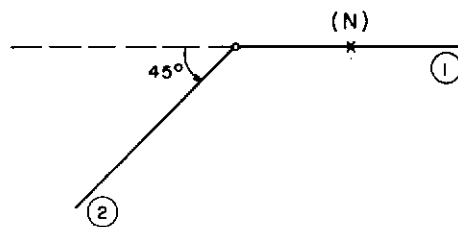


FIGURA 48

Teremos o sistema, conforme [16] e [17]:

$$\frac{EI_z}{2} y_2^{IV} + \frac{EI_y}{2} y_2^{IV} + 4 \beta (y_1'' - y_2'' + z_1'' - z_2'') = 0$$

$$\frac{EI_z}{2} z_2^{IV} + \frac{EI_y}{2} z_2^{IV} + 4 \beta (y_1'' - y_2'' + 3z_1'' - 3z_2'') = 0$$

$$\frac{EI_z}{2} y_1^{IV} + N y_1'' - 4\beta (y_1'' - y_2'' + z_1'' - z_2'') = 0$$

$$\frac{EI_y}{2} z_1^{IV} + N z_1'' - 4\beta (y_1'' - y_2'' + 3z_1'' - 3z_2'') = 0$$

fazendo:

$$y_1 = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$y_2 = a_2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$z_1 = a_3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$z_2 = a_4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

e virá:

$$N = 2261,88 \text{ t}$$

$$N = 808,9 \text{ t}$$

o menor dos dois valores, logo:

$$N = 808,9 \text{ t}$$

$$\alpha' = 8,33$$

- No caso de haste engastada numa extremidade e livre na ou
tra, vem:

$$N = 220,56 \text{ t}$$

$$N = 580,96 \text{ t} \quad ,$$

o menor dos dois valores, logo:

$$N = 220,56 \text{ t}$$

$$\alpha' = 9,09$$

- No caso de $\alpha' = 90^\circ$, o sistema será:

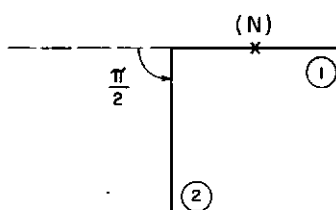


FIGURA 49

$$EI_z y_1^{IV} + N y_1'' + v = 0$$

$$EI_y y_2^{IV} - v = 0$$

e

$$- 4 \beta (y_1'' - y_2'') = v$$

- No caso de hastes bi-rotuladas, encontramos:

$$N = 1316,55 \text{ t}$$

$$\alpha' = 13,55$$

- No caso de hastes engastadas numa extremidade e livres na ou
tra:

$$N = 387,19 \text{ t}$$

$$\alpha' = 15,96$$

QUADRO 1

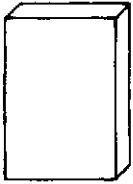
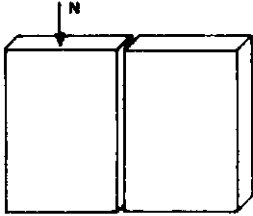
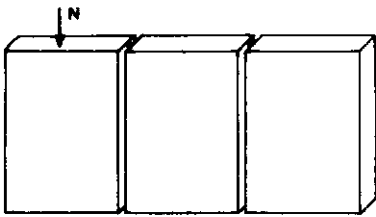
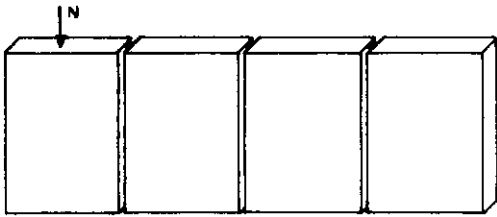
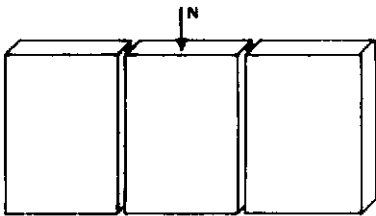
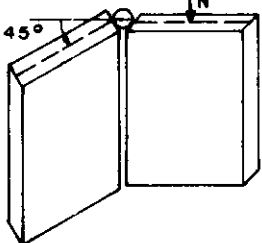
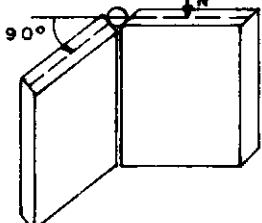
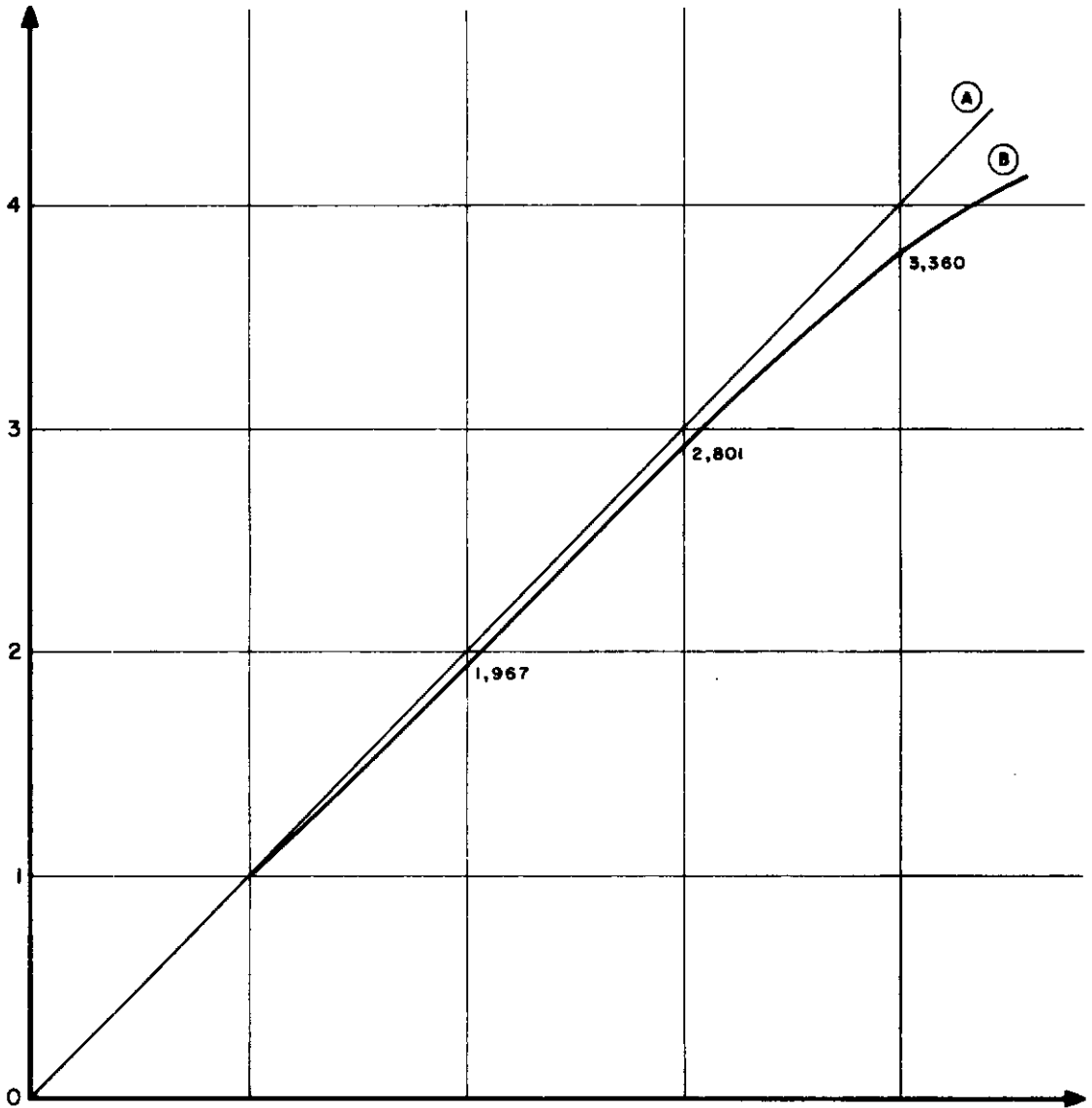
	HASTES BI-ROTULADAS $N_f = 97,13 \text{ t}$	HASTES ENGASTADAS NUMA EXTREMIDADE E LIVRE NA OUTRA. $N_f = 24,26 \text{ t}$
	$N = 191,04 \text{ t}$	$N = 48,30 \text{ t}$
	$\alpha' = 1,967$	$\alpha' = 1,990$
	$N = 272,09 \text{ t}$	$N = 71,37 \text{ t}$
	$\alpha' = 2,801$	$\alpha' = 2,95$
	$N = 326,80 \text{ t}$	$N = 80,90 \text{ t}$
	$\alpha' = 3,36$	$\alpha' = 3,66$
	$N = 289,35 \text{ t}$	$N = 71,88 \text{ t}$
	$\alpha' = 2,97$	$\alpha' = 2,97$
	$N = 808,90 \text{ t}$	$N = 220,56 \text{ t}$
	$\alpha' = 8,33$	$\alpha' = 9,09$
	$N = 1316,55 \text{ t}$	$N = 387,19 \text{ t}$
	$\alpha' = 13,55$	$\alpha' = 15,96$

GRÁFICO 1 - DEMONSTRATIVO DOS VALORES ENCONTRADOS NO
QUADRO I PARA PEÇAS BI-ROTULADAS



$x N_1$ 1

$x N$ 1,967

$x N_1$ 2

$x (N)$ 2,801

$x (N_1)$ 3

$x (N)$ 3,36

$x (N_1)$ 4

CAPÍTULO 5PARTE APLICADA DO CAPÍTULO 3

Escolhemos o tipo Estaca Larssen. Nº IV do catá
logo.

OBSERVAÇÃO:

No presente capítulo, para facilidade de cálculo, tomamos a aproximação do perfil definido pela Figura 50.

- Determinação do centro de gravidade:

Para S_1 :

$$S_1 = \frac{25 \times 20}{2} = 250 \text{ mm}^2 \quad \text{e} \quad x_1 = - \frac{2}{3} \times 25 + 9 = -25,67 \text{ mm}$$

Para S_2 :

$$S_2 = 9 \times 34 = 306 \text{ mm}^2 \quad \text{e} \quad x_2 = - \frac{34}{2} = -17,0 \text{ mm}$$

Para S_3 :

$$S_3 = 9 \times 41 = 369 \text{ mm}^2 \quad \text{e} \quad x_3 = - \frac{9}{2} = -4,50 \text{ mm}$$

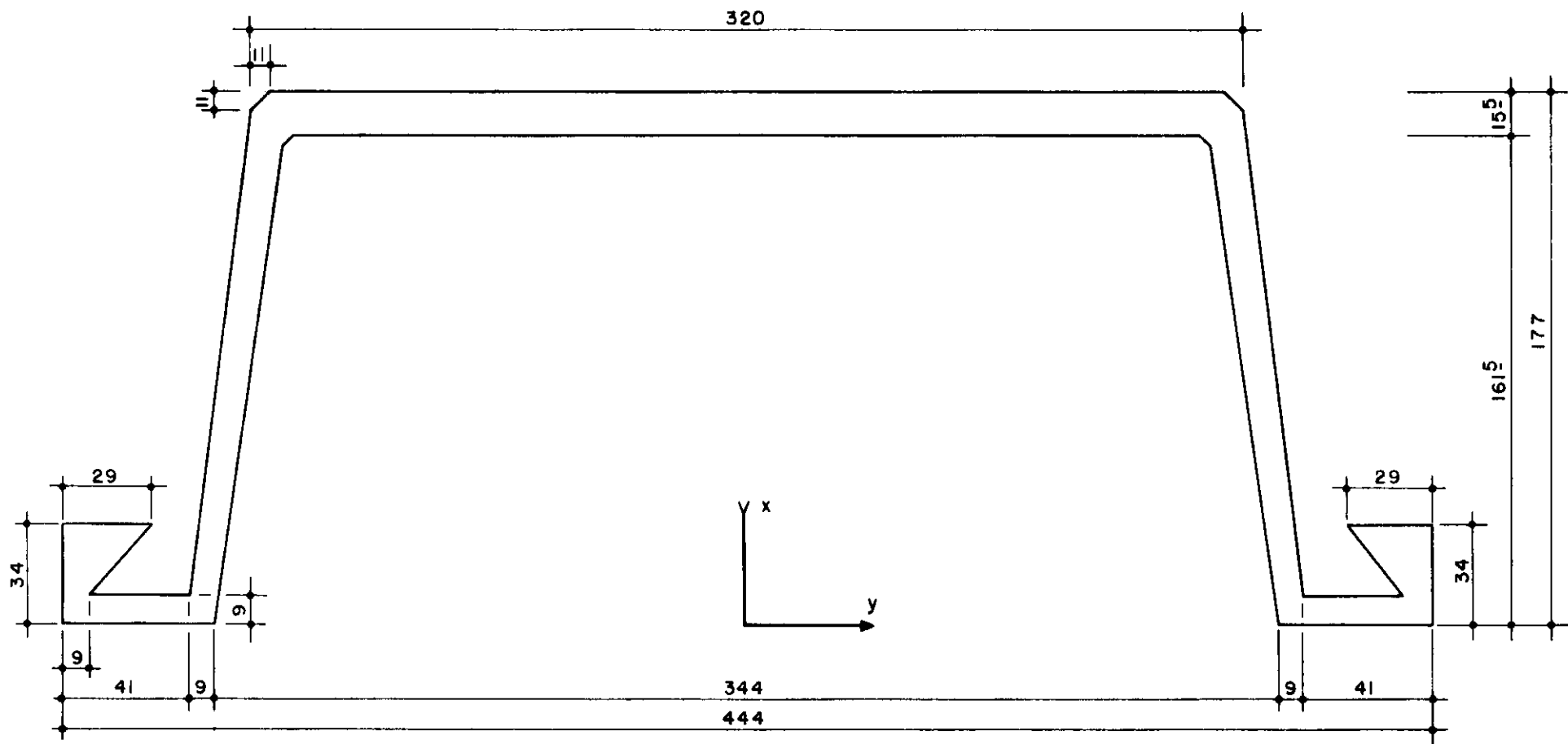


FIGURA 50

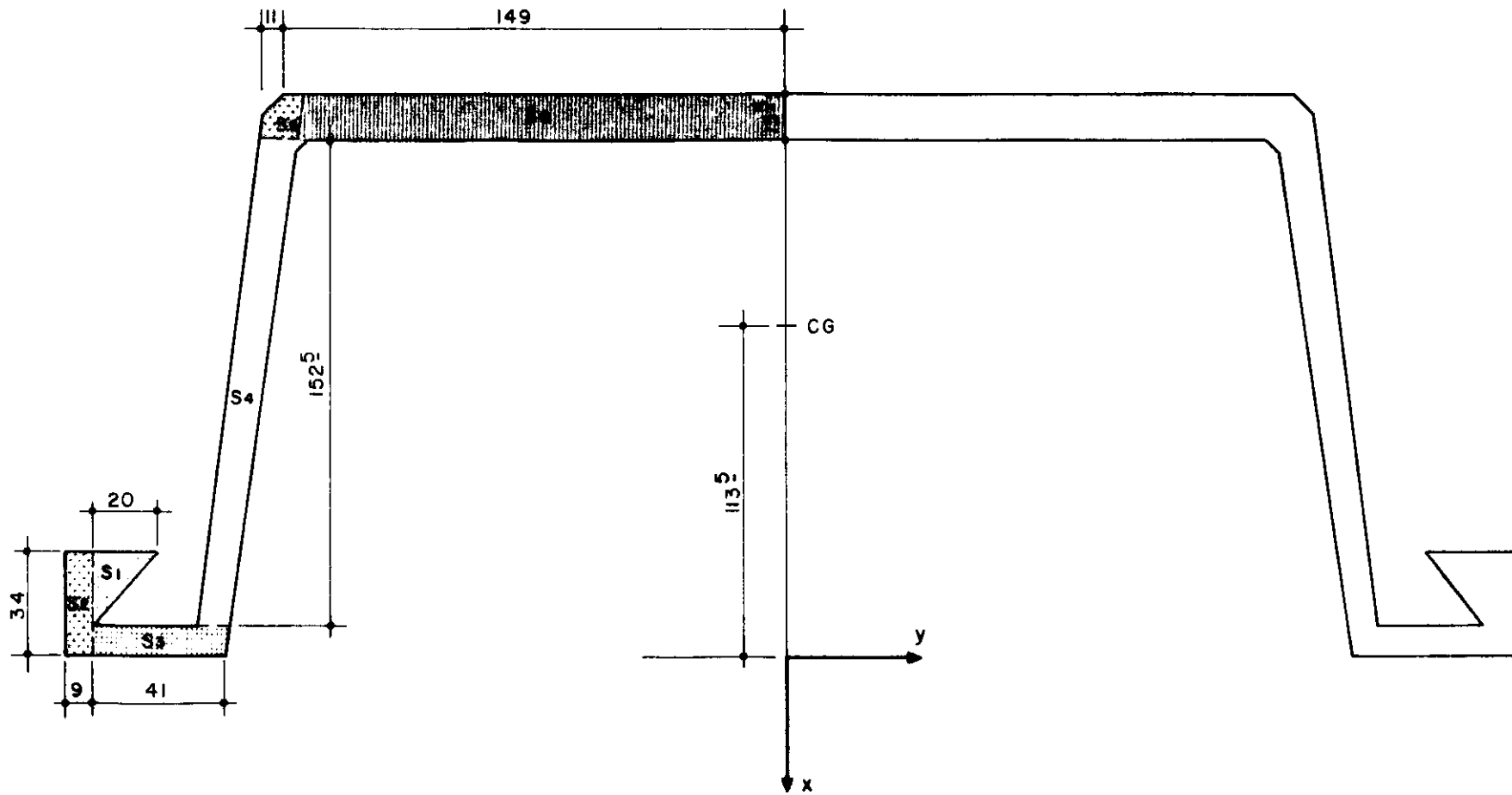


FIGURA 51

Para S_4 :

$$S_4 = 10 \times (177 - (15,5 + 9)) = 1.525,0 \text{ mm}^2$$

$$x_4 = \left(-9 + \frac{177 \cdot (15,5 + 9)}{2} \right) = -85,25 \text{ mm}$$

Para S_5 :

$$S_5 = \frac{11 \times 15,5}{2} = 85,25 \text{ mm}^2 \quad \text{e} \quad x_5 = \frac{15,5}{3} + 161,50 = -166,70 \text{ mm}$$

Para S_6 :

$$S_6 = 149 \times 15,5 = 2.309,50 \text{ mm}^2 \quad \text{e} \quad x_6 = 177 - \frac{15,5}{2} = -169,25 \text{ mm}$$

Determinação de \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{548377,74}{4844,75} = -113,20 \text{ mm}$$

Considerando o perfil a seguir como a linha média da Seção Transversal, Figura 52.

Determinação de ω_G

$$\omega_G = \int_{SO} r_g \, ds$$

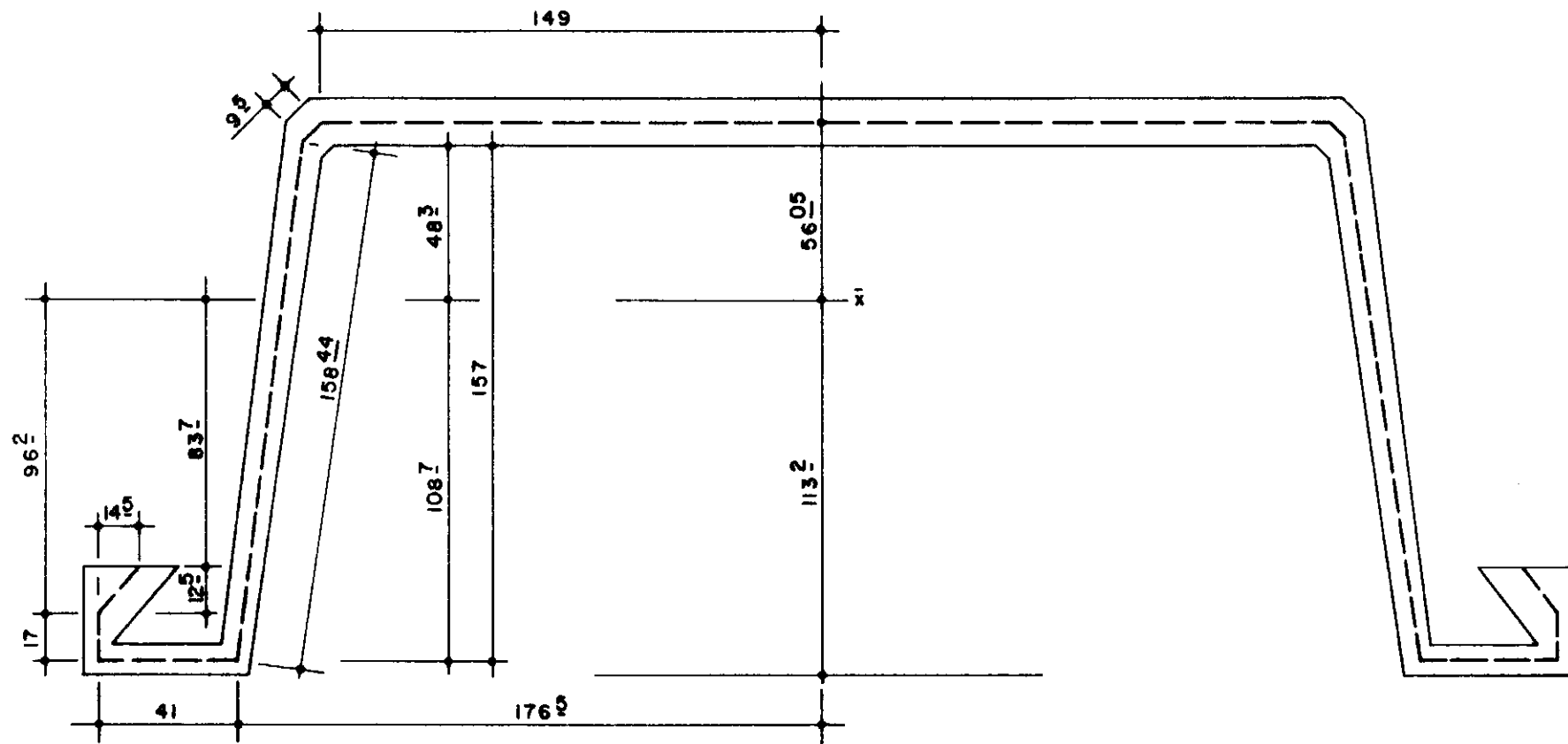


FIGURA 52 - ADOTADO COMO LINHA MÉDIA DO PERFIL

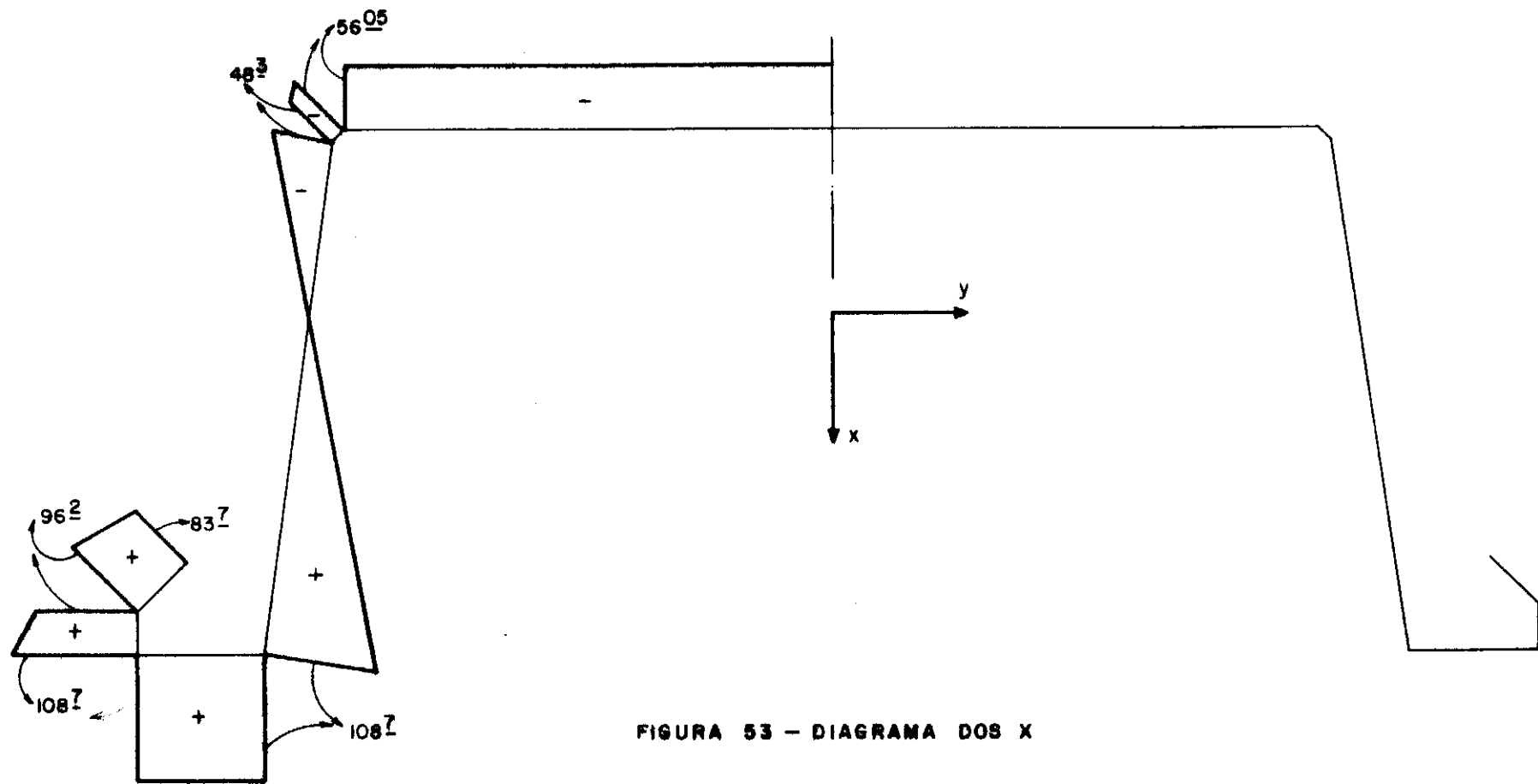


FIGURA 53 - DIAGRAMA DOS X

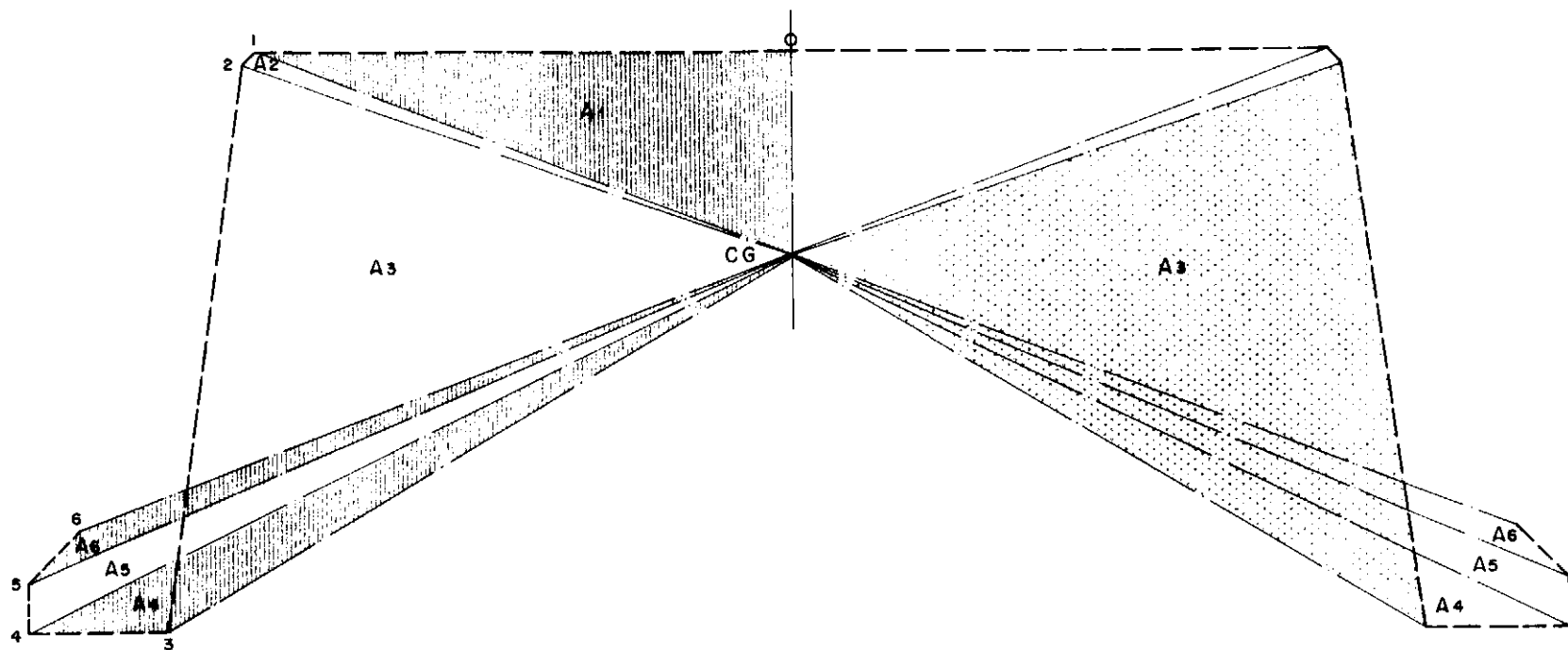


FIGURA 54 — GRÁFICO AUXILIAR PARA O CÁLCULO E
TRACADO DOS DIAGRAMAS DE W_6

No Ponto 1:

$$\omega G_1 = - 2 A_1 = - 2 \frac{149,0 \times 56,05}{2} = - 8351,45$$

No ponto 2:

$$\omega G_2 = - 2 (A_1 + A_2) , \text{ mas dividindo } A_2 \text{ em áreas}$$

teremos:

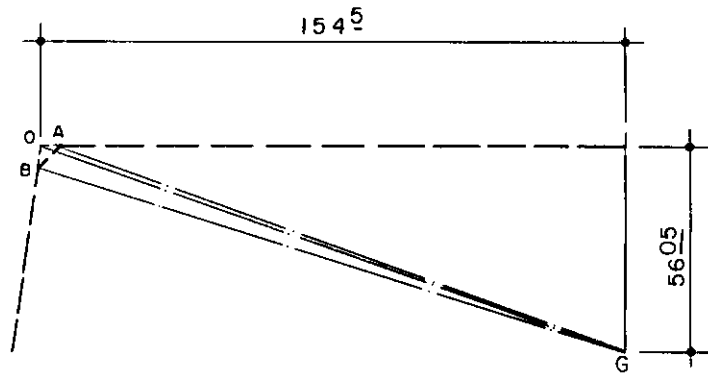


FIGURA 55

$$\overline{OA} = 5,5 \text{ mm}$$

$$\overline{OB} = 7,75 \text{ mm}$$

$$A_2 = A_{GAD} + A_{GBO} - A_{ABO}$$

$$A_2 = \frac{7,75 \times 154,5}{2} + \frac{5,5 \times 56,05}{2} - \frac{5,5 \times 7,75}{2} = 731,52 \text{ mm}^2$$

logo:

$$\omega G_2 = - 2 (4175,73 + 731,52) = - 9814,50$$

No Ponto 3:

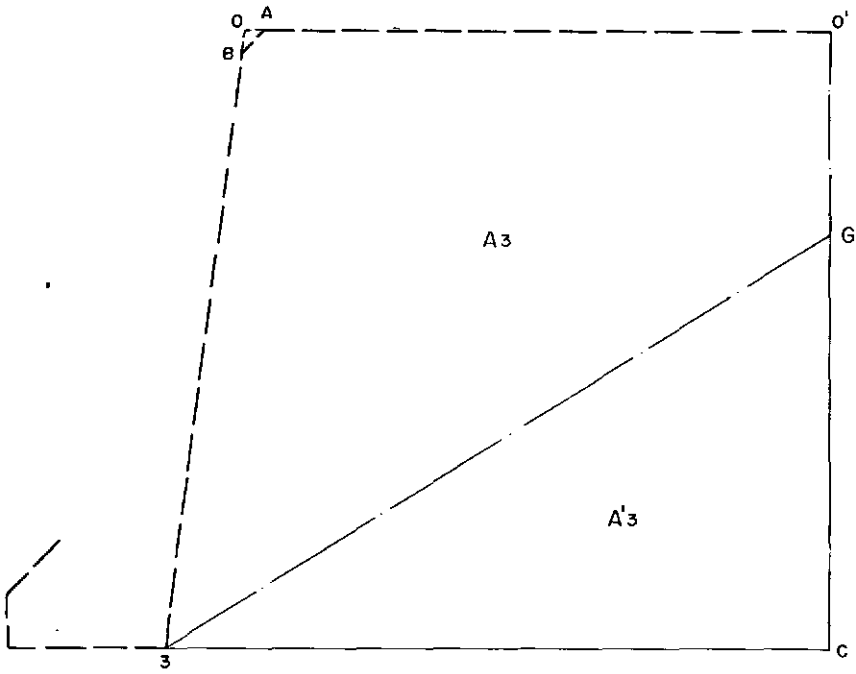


FIGURA 56

$$A_3 = A_{0,03C} - A'_3 - A_{0AB}$$

$$A_3 = (165,50 \times 164,75) - 21,31 - \frac{176,50 \times 108,70}{2} =$$

$$A_3 = 17652,05$$

$$\omega_{G_3} = - 2 \times 17652,05 = - 35304,09$$

No Ponto 4:

$$\omega_G^4 = \omega_G^3 + 2 A_4$$

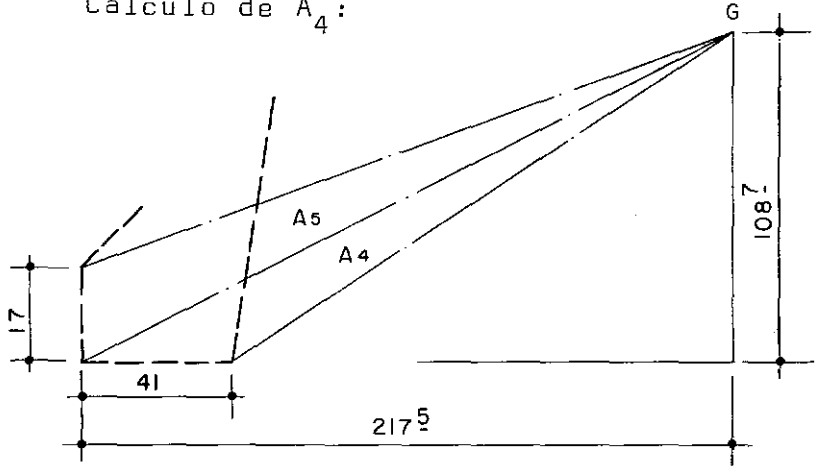
Cálculo de A_4 :

FIGURA 57

$$A_4 = \frac{41 \times 108,70}{2} = 2228,35$$

$$\omega_{G_4} = - 35304,09 + 2 \times 2228,35 = - 30.847,39$$

No Ponto 5:

$$\omega_G^5 = \omega_G^4 + 2 A_5$$

$$\omega_G^5 = - 30.847,39 + 2 \times \frac{17 \times 217,50}{2} =$$

$$\omega_{G_5} = - 27\,149,89$$

No Ponto 6:

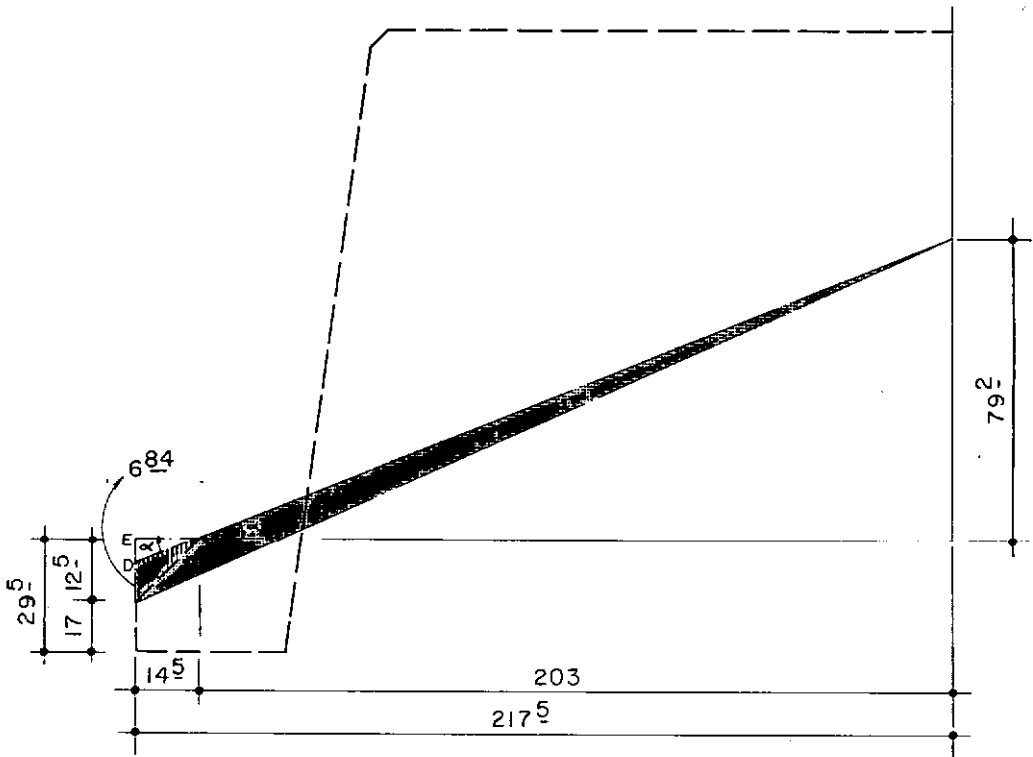


FIGURA 58

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{79,20}{203,0} = 0,39015$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DE}{14,5} \quad \therefore \quad DE = 0,39015 \times 14,5 = 5,66$$

$$A_6 = \frac{6,84 \times 217,50}{2} - \frac{6,84 \times 14,50}{2} = 743,85 - 49,59 = 694,26$$

$$\omega_G^6 = -27\,149,89 + 2 \times 694,26 = -25.761,37$$

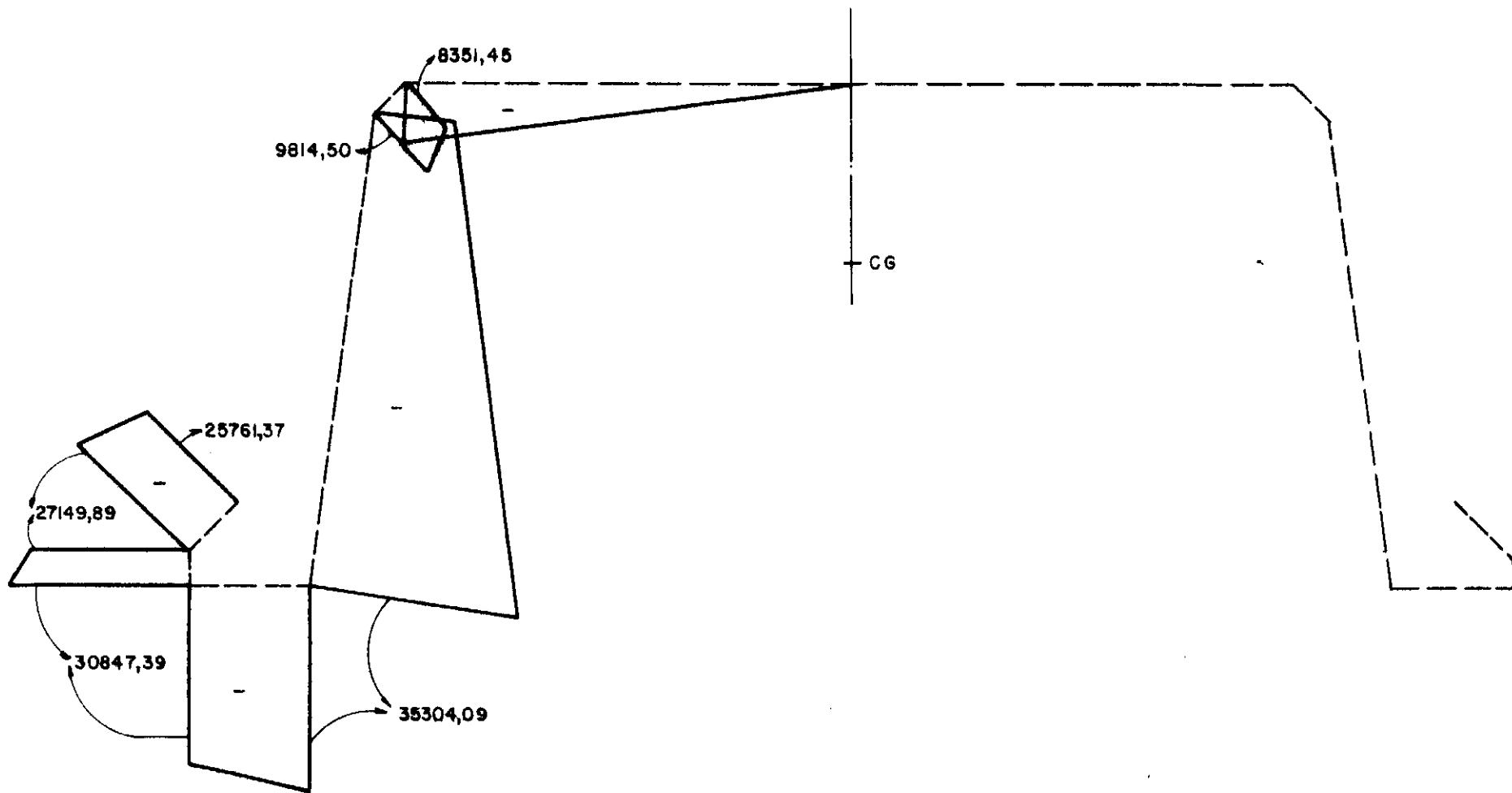


FIGURA 59 - DIAGRAMA DE W6

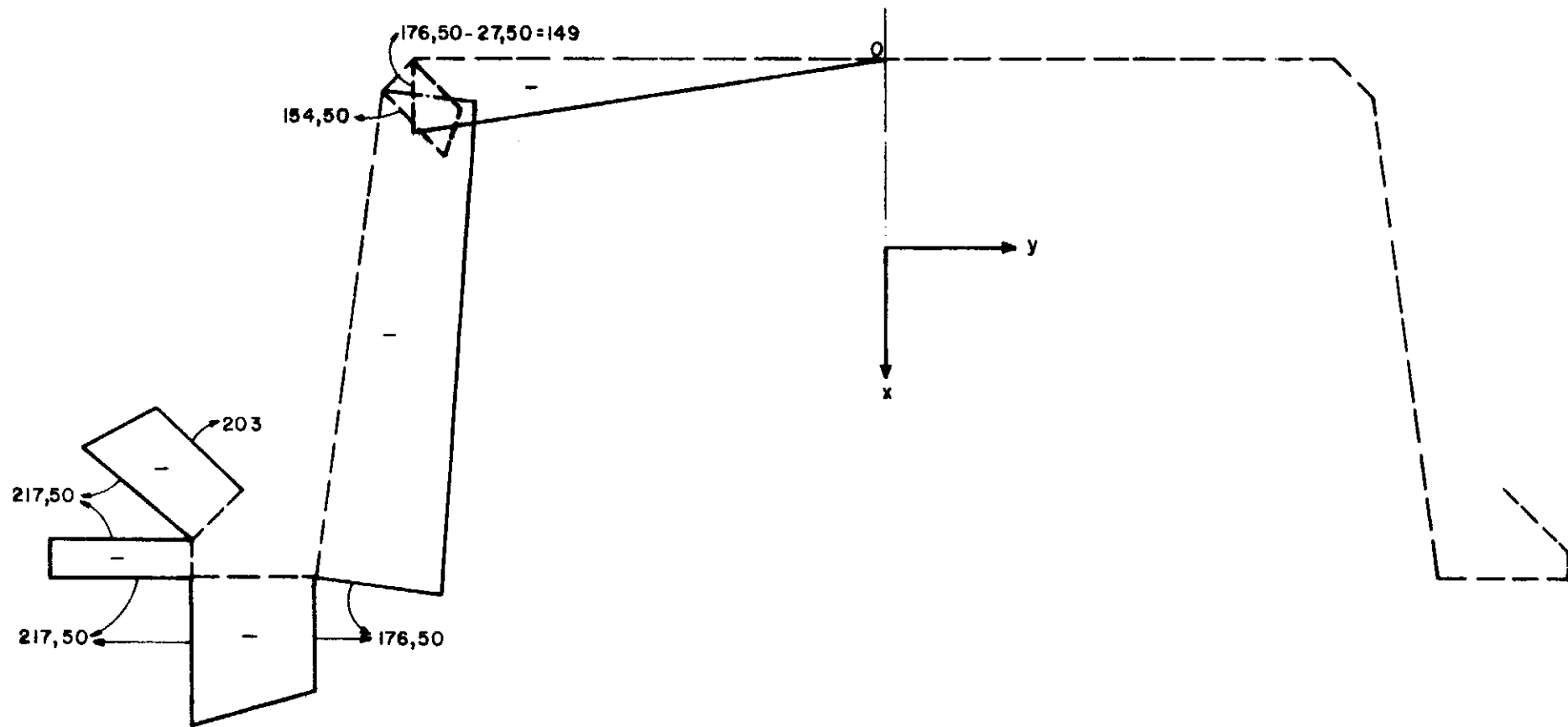


FIGURA 60 - DIAGRAMA DOS Y

- Cálculo do momento de inércia da peça em relação ao eixo passando pelo centro de gravidade.

$$I_y = \int x^2 ds$$

utilizando as tabelas usuais de integração chegaremos a:

$$I_y = 4392,28 \text{ cm}^4$$

Por metro linear de Cortina e em relação ao eixo passando pelo eixo da articulação teremos:

$$I_y = 12\,540,50 \times 2,5 = 31\,351,25 \text{ cm}^4$$

OBSERVAÇÃO:

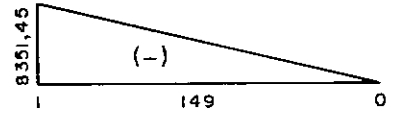
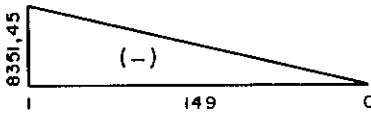
Na tabela Larssen encontramos $I = 31.579 \text{ cm}^4$, há portanto uma diferença de $227,75 \text{ cm}^4$, devido à aproximação feita do perfil.

- Cálculo do momento setorial de inércia.

$$J_\omega = \int \omega^2 ds = t \int_s^s \omega^2 ds$$

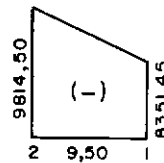
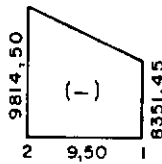
Aplicando as tabelas usuais de integração teremos:

Trecho 0.1:



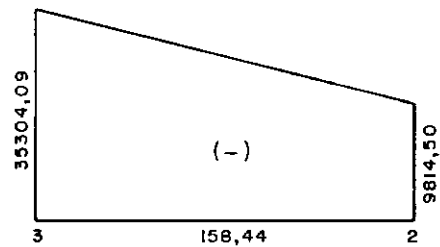
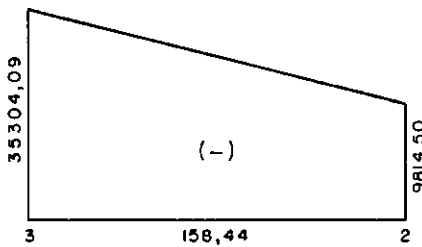
$$\frac{1}{3} \times 149 \times 8351,45 \times 8351,45 \times 15,5 = 5369334,77 \times 10^{+4}$$

Trecho 1.2:



$$\frac{1}{6} \times 11 \times 9,50 \left| (2 \times 9814,50 + 8351,45) 9814,5 + (9814,50 + 2 \times 8351,45) 8351,45 \right| = 285.512,48 + 385707,31 = 671219,79 \times 10^{+4}$$

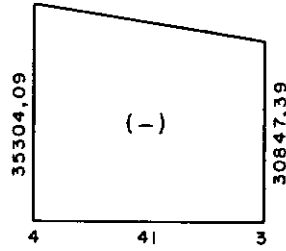
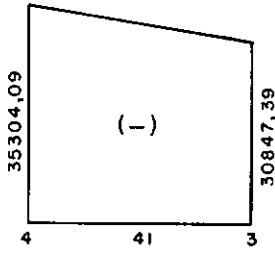
Trecho 2.3:



$$\frac{1}{6} \times 10 \times 158,44 \left| (2 \times 35304,09 + 9814,50) 35304,09 + (3504,09 + \right.$$

$$\left. + 2 \times 9814,50) 9814,50 \right| = 74975116,00 + 14236911,70 = 89212027,70 \times 10^{+4}$$

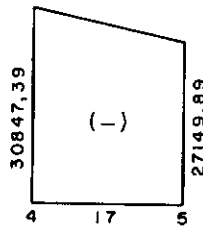
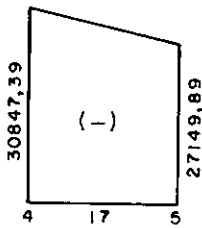
Trecho 3.4:



$$\frac{1}{6} \times 9 \times 41 \left| (2 \times 25304,09 + 30847,39) 35304,09 + (2 \times 30847,09 + \right.$$

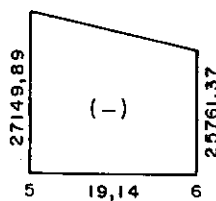
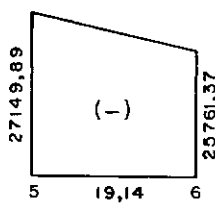
$$\left. + 35304,09) 30847,39 \right| = 22028048,93 + 18401796,13 = 40\,429\,845,06 \times 10^{+4}$$

Trecho 4.5:



$$\frac{1}{6} \times 12,5 \times 17 \left\{ (2 \times 30847,39 + 27149,89) 30847,39 + (2 \times 27149,89 + 30847,39) 27149,89 \right\} = 9\,706\,384,41 + 8\,187\,399,39 = 1\,789\,3783,80 \times 10^{+4}$$

Trecho 5.6:



$$\frac{1}{6} \times 24 \times 19,14 \left\{ (2 \times 27149,89 + 25\,761,37) 27149,89 + (2 \times 25761,37 + 27149,89) 25\,761,37 \right\} = 1\,664\,1475,24 + 1\,551\,6527,97 = 3\,215\,8003,21 \times 10^{+4}$$

logo:

$$J_{\omega} = (67,13 + 8921,20 + 4042,99 + 1789,38 + 536,94)2 \times 10^8 =$$

$$J_{\omega_G} = 30715,28 \times 10^8 \text{ mm}^6$$

.". .

$$J_{\omega_G} = 3071528 \text{ cm}^6$$

- Cálculo do Centro de Cisalhamento:

$$y_A = 0$$

$$x_A = - \frac{E \omega_G x}{I_x}$$

Determinando I_x através das tabelas usuais de integração chegaremos à:

$$I_x = 21\,539,52 \text{ cm}^4$$

- Cálculo de $E \omega_G x$

$$E \omega_G x = t \int^s \omega_G \cdot y \, ds ,$$

efetuando essa integração com os diagramas das Figuras 59 e 60.

Chegaremos à:

$$x_A = \frac{- 260\,592,07}{21\,539,52} = 12,1 \text{ cm.}$$

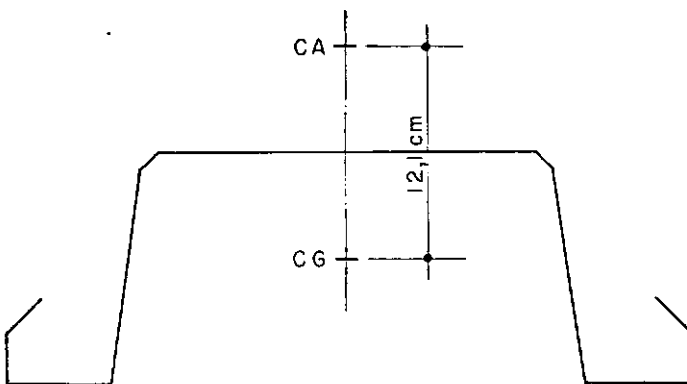


FIGURA 61

Determinação de w em relação ao centro de cisalhamento, com o auxílio da Figura 64.

- No Ponto 1 temos:

$$w_1 = 2 A_1$$

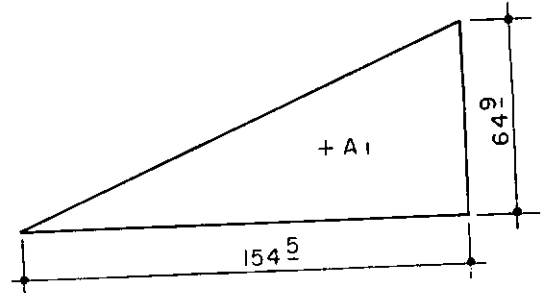
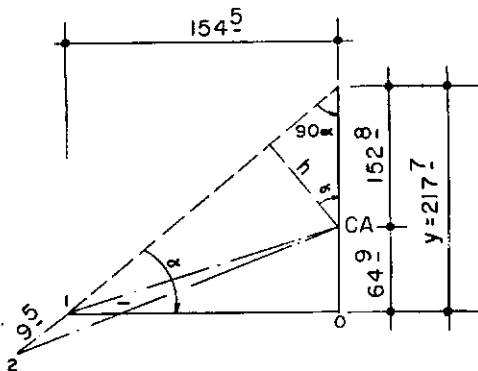


FIGURA 62

$$w_1 = 2 \times \frac{154,50 \times 64,90}{2} = + 10.027,58 \text{ mm}^2$$

- No Ponto 2 temos:



$$\begin{aligned} \overline{IO} &= 154,50 \\ \overline{OCA} &= 64,90 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{7,75}{5,5} \\ \alpha &= 54,63^\circ \end{aligned}$$

FIGURA 63

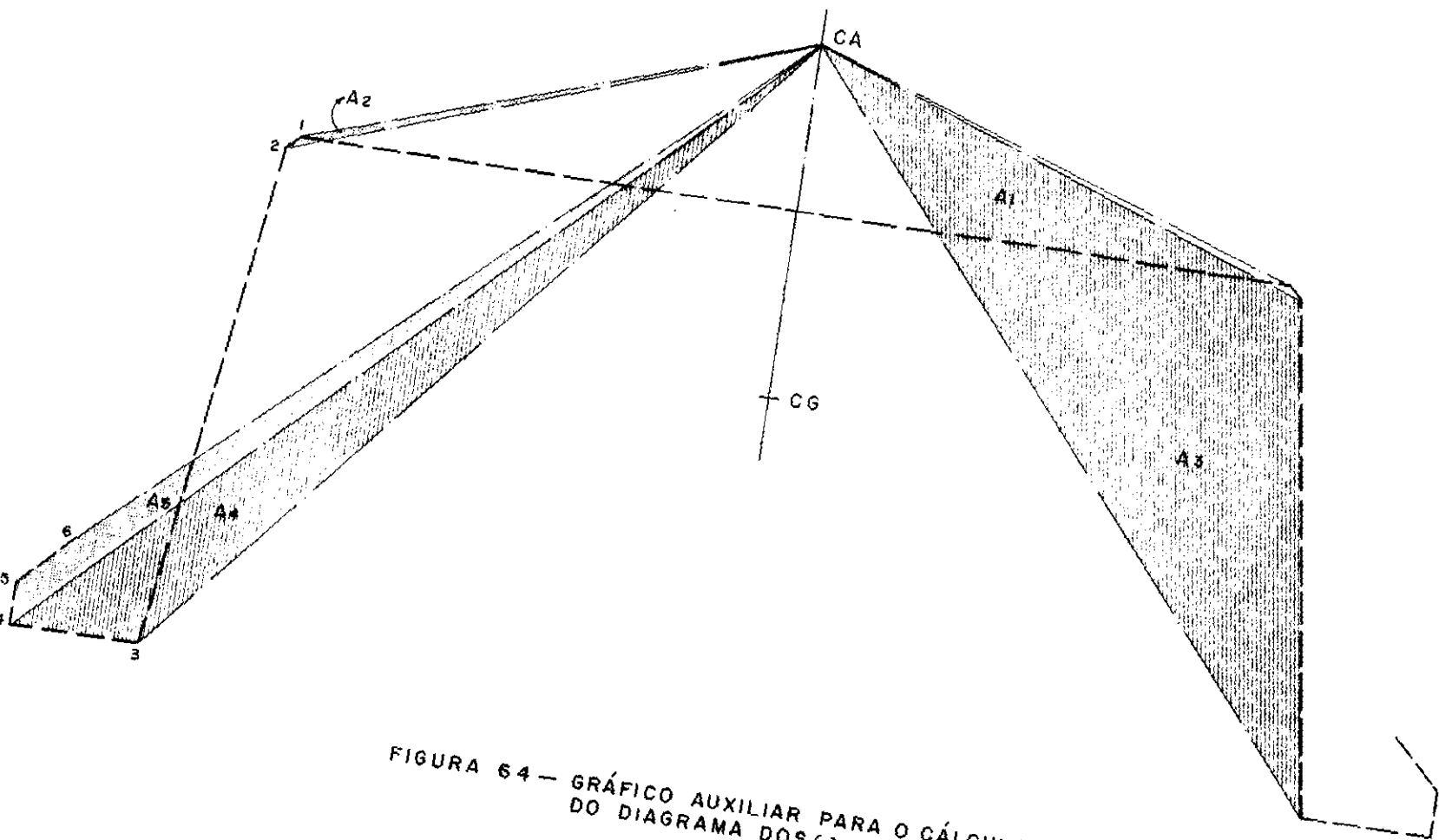


FIGURA 64 — GRÁFICO AUXILIAR PARA O CÁLCULO DO DIAGRAMA DOS QJA

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{154,5} \quad . \cdot . \quad y = 217,70$$

logo

$$h = 152,80 \cos \alpha = 88,46 \text{ mm}$$

$$- 2 A_2 = 9,5 \times 88,46 = - 840,40 \text{ mm}^2$$

$$\omega_2 = + 10.007,58 - 840,40 = + 9167,18 \text{ mm}^2 = 9186,65$$

No Ponto 3 temos:

$$\omega_3 = \omega_2 - 2 A_3$$

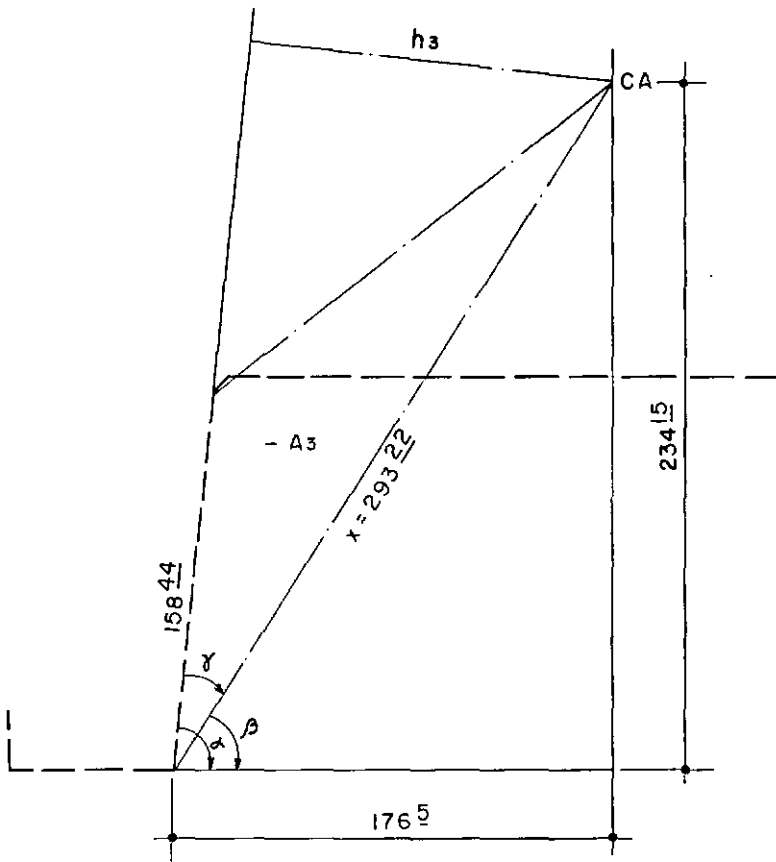


FIGURA 65

Já conhecemos $\alpha = 82,87^\circ$, pelas características da peça.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{234,15}{176,50} \quad \therefore \quad \beta = 52,99^\circ$$

logo

$$\gamma = 82,27 - 52,99 = 29,28^\circ$$

$$x = \sqrt{176,5^2 + 234,15^2} = 293,22 \text{ mm}$$

$$\therefore h_3 = 293,22 \sin \gamma = 143,41$$

$$\therefore 2 A_3 = 158,44 \times 143,41 = 22\,721,88$$

$$\omega_3 = + 9167,18 - 22\,721,88 = - 13\,554,70 \text{ mm}^2$$

- Determinação de A_4 , A_5 e temos $A_6 \approx 0$

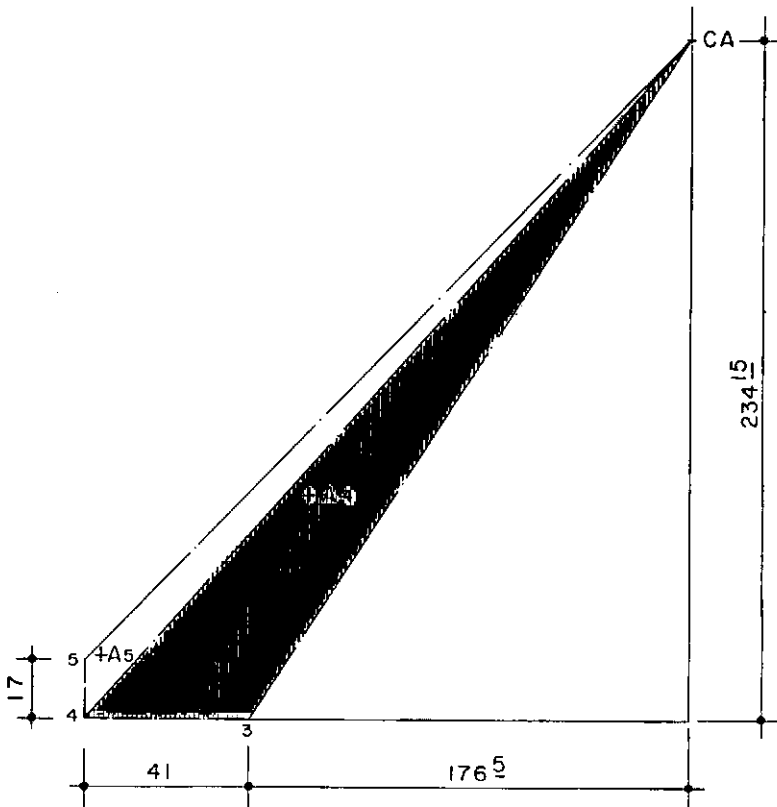


FIGURA 66

$$2 A_4 = + (41 \times 234,15) = + 9600,15 \text{ mm}^2$$

$$\omega_4 = - 13\,554,70 + 9\,600,15 = - 3.954,55 \text{ mm}^2$$

No Ponto 5 temos:

$$2 A_5 = 17 \times 217,50 = + 3.697,50 \text{ mm}^2$$

$$\omega_5 = - 3\,954,55 + 3.697,50 = - 257,05 \text{ mm}^2$$

$$A_6 \cong 0 \quad \therefore \quad \omega_5 \cong \omega_6$$

Teremos o seguinte diagrama de ω em relação ao centro de cisalhamento, Fig. 67.

- Cálculo do momento setorial de inércia

Usando as tabelas de integração para a Figura 67 chegaremos

$$J_{\omega} = 3\,85610,22 \text{ cm}^6$$

Determinação de J_t

$$J_t = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

$$K_1 = \frac{ab^3}{3}$$

$$K_2 = \frac{cd^3}{3}$$

$$K_3 = \frac{ef^3}{3}$$

$$K_4 = \frac{Gh^3}{3}$$

logo:

$$J_t = 160 \times 15,5 + 162,94 \times 10^3 + 41 \times 9^3 + 23 \times 19^3 = 946.406$$

$$J_t = 1.892.812,0 \text{ mm}^4 = \frac{1.892.812}{3} \text{ cm}^4 = 63,09 \text{ cm}^4$$

Determinação da carga crítica para a peça iso

lada:

$$E = 21 \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$G = 8 \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$S = 48,45 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 2 = 4\,845 \times 2 = 9\,690 \text{ mm}^2 =$$

$$= 96,90 \text{ m}^2 = 96,90 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A = 0,121 \text{ m}$$

$$I_x = 2,154 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_y = 0,4392 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$J_t = 63,09 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$J_\omega = 0,39 \times 10^{-6} \text{ m}^6$$

$$l = 6 \text{ m}$$

O sistema a ser resolvido é:

$$EI_y \xi^{IV} + N \xi'' = 0$$

$$EI_x \eta^{IV} + N \eta'' + N A \phi'' = 0$$

$$EJ_\omega \phi^{IV} + \phi'' \left| N \frac{I_x + I_y}{S} - GJ_t + NA^2 \right| + NA\eta'' = 0$$

levando os dados numéricos ao sistema e adotando para

$$\xi = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$\eta = a_2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$\phi = a_3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$\xi'' = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$\eta'' = -a_2 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$\phi'' = -a_3 \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$\xi^{IV} = a_1 \frac{\pi^4}{l^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$\eta^{IV} = a_2 \frac{\pi^4}{l^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} ,$$

$$\phi^{IV} = a_3 \frac{\pi^4}{l^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

$$\begin{vmatrix}
 252,8 & 0 & 0 \\
 0 & 1240,2 - N & - 0,121 N \\
 0 & 0,121 N & 7,30 - 0,0414 N
 \end{vmatrix} = 0$$

o que resulta as raizes:

$N = 252,08 \text{ t} \rightarrow$ Carga crítica no plano de simetria;

$N = 2.168,20 \text{ t} \rightarrow$ Carga crítica no plano perpendicular à si
metria;

$N = 164,90 \text{ t} \rightarrow$ Carga crítica por torção.

Verificamos que a carga crítica por torção sim
plesmente é:

$$N_T = \frac{1}{A + \frac{I_x + I_y}{S}} \cdot (GJ_t + EJ_\omega \frac{\pi^2}{l^2}) = 176,0 \text{ t},$$

portanto maior que a carga crítica quando temos torção acompa
nhada por flexão.

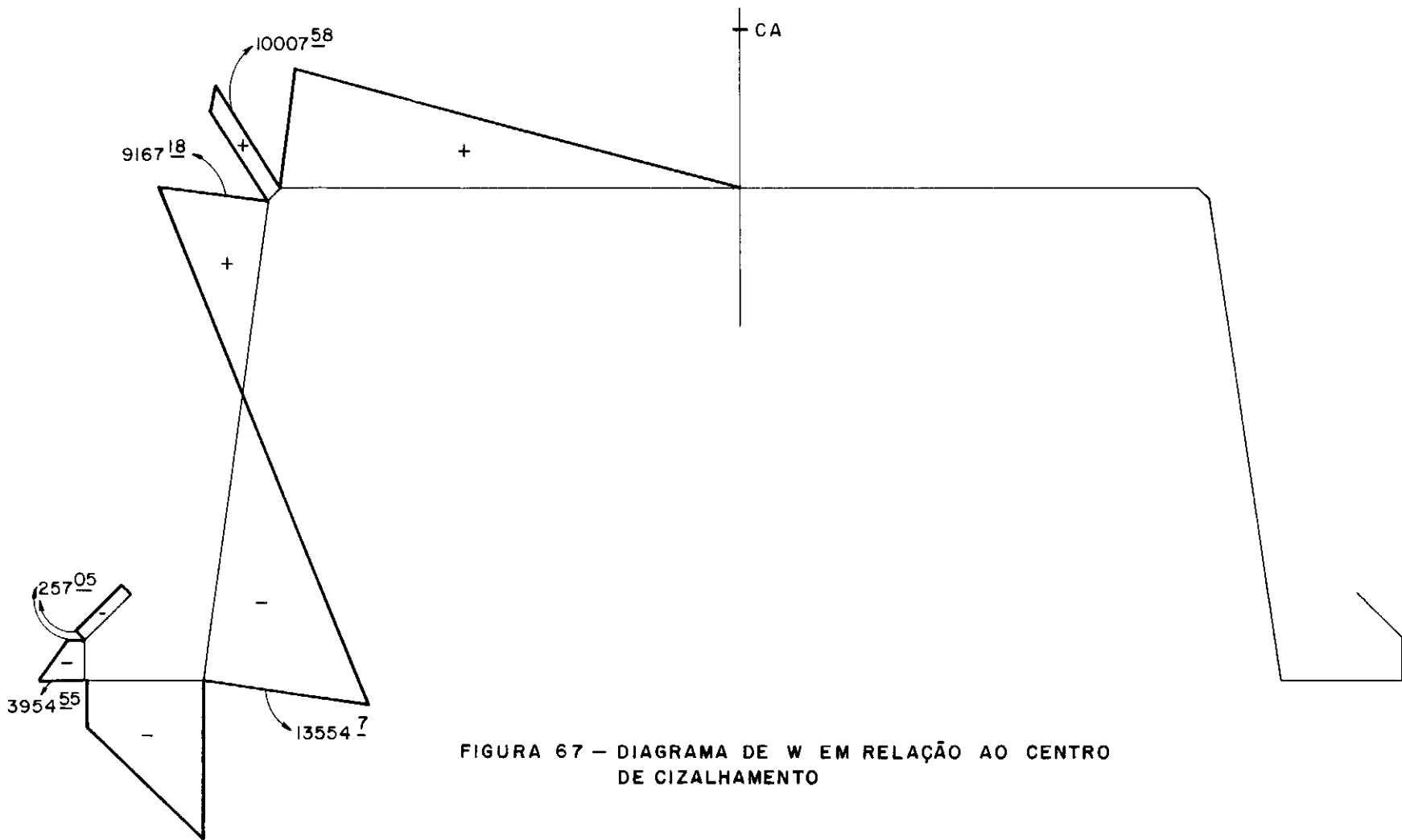


FIGURA 67 — DIAGRAMA DE W EM RELAÇÃO AO CENTRO DE CIZALHAMENTO

Adotando $\ell = 3 \text{ m}$ chegaremos às raízes:

$$N = 1.014, \quad t$$

$$N = 7.876,1 \quad t$$

$$N = 331,34 \quad t$$

e a carga crítica pela simples torção:

$$N_T = 338,67 \quad t$$

- Caso de duas pranchas associadas com $\alpha = 0$

O sistema conforme (5) é:

$$EJ_{\omega} \phi_1^{IV} + NA \phi_1'' + \phi_1'' \left(N \frac{I_x + I_y}{S} - GJ_t + \frac{N}{2} A^2 \right) + \frac{b}{2} EI_y \xi_1^{IV} -$$

$$- C \sin \gamma (EI_x \eta_1^{IV} + N \eta_1'' + NA \phi_1'') + \frac{b}{2} NA \xi_1'' = 0$$

$$EJ_{\omega} \phi_2^{IV} - GJ_t \phi_2'' - \frac{b}{2} EI_y \xi_1^{IV} - \frac{b}{2} NA \xi_1'' + C \sin \gamma (EI_x \eta_1^{IV} +$$

$$+ N \eta_1'' + NA \phi_1'') = 0$$

$$EI_y \xi_2^{IV} + EI_y \xi_1^{IV} + NA \xi_1'' = 0$$

$$EI_x \eta_1^{IV} + N \eta_1'' + NA \phi_1'' + EI_x \eta_1^{IV} = 0$$

$$\eta_1'' - \eta_2'' + C \sin \gamma \phi_1'' - C \sin \gamma \phi_2'' = 0$$

$$\xi_2'' - \xi_1'' + C \sin \gamma \phi_1'' - C \cos \gamma \phi_2'' = 0$$

$$\text{onde } C = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (A + \bar{x})^2} = \sqrt{(11,32 + 12,1)^2 + 20^2} = 30,80 \text{ cm}$$

$$\text{Tg } \gamma = \frac{\frac{\bar{x} + A}{2}}{\frac{b}{2}} = 49,50^\circ$$

logo:

$$\frac{b}{2} = 0,20 \text{ m}$$

$$C = 0,3080$$

$$C \sin \gamma = 0,2341$$

$$C \cos \gamma = 0,1999$$

Substituindo os dados numéricos adotamos:

$$\xi_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\xi_2 = a_2 \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\eta_1 = a_3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\eta_2 = a_4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\phi_1 = a_5 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\phi_2 = a_6 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

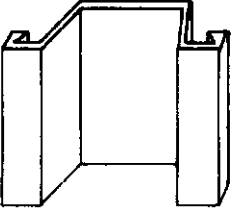
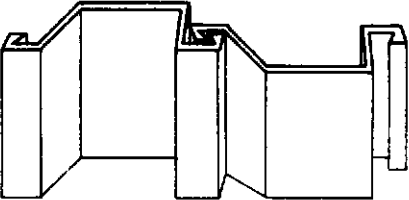
Levando ao sistema essas expressões e resolvendo o determinante encontraremos:

$$N = 1.743,43 \text{ t}$$

$$N = 4.091,47 \text{ t}$$

$$N = 354,76 \text{ t}$$

QUADRO DO ESTUDO DAS HASTES DE PAREDES DELGADAS

L = 6 m	COMO PAREDES DELGADAS
	<p data-bbox="741 688 911 722">N = 252,8 t</p> <p data-bbox="741 810 960 844">N = 2168,20 t</p> <p data-bbox="741 921 906 955">N = 164,9 t</p>
	<p data-bbox="741 1520 955 1554">N = 1743,43 t</p> <p data-bbox="741 1633 958 1667">N = 4091,47 t</p> <p data-bbox="741 1747 932 1780">N = 354,76 t</p>

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

6.1 - Hastes de Paredes Espessas:

1) Pelo gráfico (1), verificamos que para duas pranchas, o erro que se cometeria ao calcularmos a carga crítica como se elas formassem um conjunto monolítico é da ordem de 2%. No caso de três pranchas e a extrema carregada o erro é de 7%.

2) Verificamos também que ao adicionarmos mais pranchas à direita da peça carregada a curva (B) do gráfico (1), vai se afastando da curva (A), o que significa dizer que o erro ao se calcular a carga crítica como um conjunto monolítico vai se tornando considerável.

Percebe-se também que a partir de um certo número de pranchas colocadas à direita, com a adição de mais peças praticamente não haverá mudanças apreciáveis no valor da carga crítica, o que importa em admitir que a curva tenderá para uma assíntota.

3) Para $\alpha = 90^\circ$, caso das pranchas de canto, teremos valores elevados para a carga crítica, o que era de se esperar pelo impedimento que a montagem então oferece ao fenômeno da flambagem. Isso importa em observar que o comportamento da associação A é praticamente idêntica, para fins de flambagem, ao

do L maciço.

6.2 - Hastes de Paredes Delgadas:

Para a haste isolada verificamos:

Para $\ell = 3\text{m}$ e bi-rotulada, as raízes encontradas foram:

$$N = 1014,2 \text{ t}$$

$$N' = 7.876,10 \text{ t}$$

$$N' = 331,34 \text{ t}$$

que são cargas críticas de pressão-flexão.

A carga crítica considerando-se simplesmente à torção:

$$N_T = 338,67 \text{ t}$$

Para $\ell = 6 \text{ m}$

$$N \text{ no plano de simetria} = 252,8 \text{ t}$$

$$N \text{ no plano } \perp \text{ a simetria} = 2.168,20 \text{ t}$$

$$N \text{ devido à torção} = 164,90 \text{ t}$$

$$N_T = 176,00 \text{ t}$$

Podemos observar que quando a peça vai se tornando curta, a menor raiz encontrada se aproxima da carga crítica simplesmente por torção e se afasta muito dos valores encontrados pela equação de Euler. Com isso a forma flambada se aproxima da flambagem por torção simples.

À medida que alongamos a peça, já não existe tanta diferença entre o valor encontrado da carga crítica por torção e o valor obtido pela expressão de Euler, que coincide com uma das raízes do sistema.

Cumprе portanto, levarmos sempre em consideração o estudo das hastes de paredes delgadas, principalmente quando a peça vai se tornando curta. Verificamos que para $\ell = 6 \text{ m}$, o valor adotado para carga crítica no caso em estudo é da ordem de 65% do valor dado pela fórmula de Euler.

No caso das equações 43, em que há 2 eixos de simetria, além da independência das equações, verifica-se que a 3.^a equação independe de ℓ . Isso decorreu do desaparecimento do termo em EJ_w , por ser nulo o momento de inércia setorial em face da consideração simplificada de concentrar a área da seção transversal na linha média.

As estacas Larssen recomendam no cálculo de uma cortina a adoção do momento de inércia de flexão calculado para o eixo médio da parede quando cada duas estacas se acham em oposição. A propósito transcrevemos a justificativa seguinte encontrada na Ref. [1³], Pág. 2.

“Teoricamente é inadmissível que não haja escorregamento no encaixe de dois ferros; portanto, rigorosamente o cálculo do momento de resistência da parede deveria ser feito em relação ao eixo de gravidade de cada ferro.”

A citação acima vem pois em abono do encaminhamento que demos ao assunto, calculando as flexões em relação aos eixos baricêntricos de cada estaca-prancha isoladamente considerada; não obstante para simples problemas de dimensionamento da flexão de cortinas muito extensas parecem-nos bem fundamentada a recomendação da Larssen, que a seguir ao texto transcrito ainda acrescenta vários outros argumentos favoráveis.

BIBLIOGRAFIA

- | ¹ | L. Elsgoltz, "Ecuaciones Diferenciales y Calculo Varia
cional"; 2.^a Edição.

- | ² | Kollbrunner - Hajdin, "Dünnwandige Stäbe", Volume 1, 1.^a
Edição.

- | ³ | Kollbrunner/Meister, "Knicken Biegedrillknicken, Kippen,
1.^a Edição.

- | ⁴ | B.Z. Vlassov, "Pièces Longues en Voiles Minces", Eyrols -
- 1962.

- | ⁵ | Timoshenko, "Theory of Elastic Stability".

- | ⁶ | Crolland - Walker, "Method Energy".

- | ⁷ | Telemaco Van Langendonck, "Resistência dos Materiais -
- Deformações II".

- | ⁸ | Sydney M. G. dos Santos, "Kippe", Edição 1950.

- | ⁹ | Sydney M. G. dos Santos, "Flambagem de Hastes Maciças
Associadas Longitudinalmente", Novembro de 1966, PUC.

- | ¹⁰ | Sydney M. G. dos Santos, 2.^a Jornadas Luso - Brasileiras
de Engenharia Civil - III Volume, 1967.

- |¹¹| Jaime Mason e Jorge de Mello e Souza, "Métodos de Energia com Aplicações a Problemas Elásticos"
- |¹²| Roark, "Fórmulas for Stress and Strain", 4.^a Edição
- |¹³| Dr. Stecher, de Essen, "O Emprego das Ensecadeiras Metálicas, tipo Larssen na construção de Portos, Suplemento da Revista Jahrbuch der Hafenbautexchnischen Gesellschaft, 1924
- |¹⁴| Larssen Handbuch , Edição 1935, Dortmund.
- |¹⁵| Tablestacas Metálicas (Larssen, Edição 1929), Dortmund
- |¹⁶| Steel Sheet Piling, 3.^a Edição, Paris.